Miroslav Novotný

Об одной характеристике упорядоченного континуума

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 1, 75–82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100069

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УПОРЯДОЧЕННОГО КОНТИНУУМА

МИРОСЛАВ НОВОТНЫЙ (Miroslav Novotný), Брно.

(Поступило в редакцию 15/IV 1952 г.)

Настоящая работа находится в тесной генетической связи с работой *Новака* О некоторых характеристиках упорядоченного континуума и посвящена изучению характеристики $\mathfrak{q}(C)$, т. е. супремума верхних характеров точек упорядоченного континуума C. В частности автор исследует зависимость между характеристикой $\mathfrak{q}(C)$ и сепарабельностью упорядоченного континуума C. Далее приводится способ построения квазиоднородного и симметрического континуума по данному упорядоченному континууму с сохранением основных характеристик.

Пусть C — упорядоченный континуум. *И. Новак* обозначает[1]) символом $\mathfrak{n}(C)$ мощность, а символом $\mathfrak{m}(C)$ сепарабельность упорядоченного континуума C. Если $c_{\varrho\sigma}$ есть характер внутренней точки x в упорядоченном континууме C, то мощность $\min(\aleph_\varrho, \aleph_\sigma)$ он называет *нижним*, а мощность $\max(\aleph_\varrho, \aleph_\sigma)$ — *верхним характером* точки x. Аналогично он говорит, что нижний и верхний характер первой (последней) точки в C характера $c_{*\sigma}$ $(c_{\varrho *})$ равен $\aleph_\sigma$ $(\aleph_\varrho)$. Обозначим через $p(x)$ нижний, а через $q(x)$ — верхний характер точки $x \in C$. И. Новак положил $\mathfrak{p}(C) = \sup\limits_{x \in C} p(x)$, $\mathfrak{q}(C) = \sup\limits_{x \in C} q(x)$. Мощности $\mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{n}(C)$ он называет *характеристиками* упорядоченного континуума C. Целью настоящей работы является изучение характеристики $\mathfrak{q}(C)$. Символ C на протяжении всей работы означает упорядоченный континуум.

Теорема 1. *Мощность $\mathfrak{q}(C)$ является наименьшей мощностью $\mathfrak{a}$ со следующим свойством: в каждом подмножестве $H \subset C$ мощности $> \mathfrak{a}$ существует хоть одна точка, разделяющая H на два подмножества мощности $> \mathfrak{a}$.*

---

[1]) *И. Новак:* О некоторых характеристиках упорядоченного континуума, Чехосл. мат. журнал *77* (1952). Здесь читатель найдет определение понятий: упорядоченный континуум, сепарабельность, характер точки.

Доказательство. I. Предположим, что существует подмножество $H \subset C$ мощности $> \mathfrak{q}(C)$ со следующим свойством: каждая точка $x \in H$ делит H на два подмножества, из которых только одно может иметь мощность $> \mathfrak{q}(C)$.

Обозначим символом $\mathbf{0}$ первую, символом $\mathbf{1}$ последнюю точку в C; пусть A означает множество всех точек множества C, вправо от которых лежит подмножество в H мощности $> \mathfrak{q}(C)$; аналогично, пусть B означает множество всех точек множества C, влево от которых лежит подмножество в H мощности $> \mathfrak{q}(C)$. Положим $\eta = \sup A$, $\xi = \inf B$. Нетрудно видеть, что $\xi \leqq \eta$. Обозначим через E множество всех $t \in C$, для которых $\xi \leqq t \leqq \eta$.

Из следующих четырех возможностей

1. $\xi \neq \mathbf{0}$, $\eta \neq \mathbf{1}$; 2. $\xi = \mathbf{0}$, $\eta \neq \mathbf{1}$; 3. $\xi \neq \mathbf{0}$, $\eta = \mathbf{1}$; 4. $\xi = \mathbf{0}$, $\eta = \mathbf{1}$

имеет место одна и только одна. В первом случае построим возрастающую трансфинитную последовательность $\{x_\lambda\}_{\lambda<\omega_\mu}$ с пределом ξ и убывающую трансфинитную последовательность $\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ с пределом η регулярной мощности. Конечно, имеет место $\overline{\omega}_\mu \leqq \mathfrak{q}(C)$, $\overline{\omega}_\nu \leqq \mathfrak{q}(C)$. Предположим, что $x_0 = \mathbf{0}$, $y_0 = \mathbf{1}$. Определим $E_\lambda = \langle x_\lambda, x_{\lambda+1})$ для $\lambda < \omega_\mu$ и $E'_\lambda = (y_{\lambda+1}, y_\lambda\rangle$ для $\lambda < \omega_\nu$. Тогда $C = E \cup \bigcup_{\lambda<\omega_\mu} E_\lambda \cup \bigcup_{\lambda<\omega_\nu} E'_\lambda$. Во втором случае построим аналогично убывающую трансфинитную последовательность $\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$ с пределом η регулярной мощности и определим аналогично интервалы E'_λ для $\lambda < \omega_\nu$; конечно, будет $\overline{\omega}_\nu \leqq \mathfrak{q}(C)$. Тогда $C = E \cup \bigcup_{\lambda<\omega_\nu} E'_\lambda$. В третьем случае имеет аналогично место $C = E \cup \bigcup_{\lambda<\omega_\mu} E_\lambda$, $\overline{\omega}_\mu \leqq \mathfrak{q}(C)$. В четвертом случае будет $C = E$.

Из нашего предположения, что только с одной стороны от каждой точки $x \in H$ может лежать система точек из множества H мощности $> \mathfrak{q}(C)$, легко вытекает, что система всех точек множества H в E, E_λ, E'_λ имеет мощность $\leqq \mathfrak{q}(C)$. Так как мощность системы всех слагаемых в соединении, выражающем C, во всех четырех случаях $\leqq \mathfrak{q}(C)$, то множество H имеет мощность $\leqq \mathfrak{q}(C)$; это противоречие. Итак, в каждом подмножестве $H \subset C$ мощности $> \mathfrak{q}(C)$ найдется хоть одна точка, разделяющая H на два подмножества мощности $> \mathfrak{q}(C)$.

II. Пусть $\mathfrak{a} = \aleph_\tau < \mathfrak{q}(C)$. Тогда в C существует хоть одна точка, к которой сходится трансфинитная монотонная последовательность типа $\omega_{\tau+1}$ или $\omega^*_{\tau+1}$.[2]) Множество H, образованное из всех членов этой последовательности, имеет мощность $> \mathfrak{a}$ и только с одной стороны от каждого из его элементов в нем содержится подмножество в H мощности $> \mathfrak{a}$. Итак, $\mathfrak{q}(C)$ является минимальной мощностью со свойством, указанным в теореме.

---

[2]) Символ T^* означает тип упорядоченный обратно по сравнению с типом T.

Теорема 2. *Мощность* $\mathfrak{q}(C)$ *является минимальной мощностью* $\mathfrak{a}$ *со следующим свойством: каждое подмножество* $H \subset C$ *мощности* $> \mathfrak{a}$ *содержит подмножество плотного типа.*[3])

Доказательство. I. Пусть $\mathbf{0}$ означает первую, а $\mathbf{1}$ последнюю точку в C. Пусть $H \subset C$ — подмножество мощности $> \mathfrak{q}(C)$. По теореме 1 существует точка $x \in H$ так, что каждый из интервалов $\langle \mathbf{0}, x\rangle$, $\langle x, \mathbf{1}\rangle$ содержит подмножество множества H мощности $> \mathfrak{q}(C)$. Обозначим $I_0 = \langle \mathbf{0}, x\rangle$, $I_1 = \langle x, \mathbf{1}\rangle$. Предположим, что мы построили все замкнутые интервалы $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots} (\lambda < n)$, где $i_\lambda = 0$ или $= 1$, для всех $n \leqq m$ так, что в каждом из этих интервалов содержится подмножество множества H мощности $> \mathfrak{q}(C)$. По теореме 1 существует, следовательно, внутри каждого из интервалов $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda < m)$ такая точка, входящая в множество H, что вправо и влево от нее существует подмножество множества $H \cap \cap I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda < m)$ мощности $> \mathfrak{q}(C)$. Эта точка разделит интервал $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda < m)$ на два замкнутых интервала $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0}$ $(\lambda < m + 1)$ и $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1}$ $(\lambda < m + 1)$; притом каждый из этих интервалов содержит подмножество множества H мощности $> \mathfrak{q}(C)$.

Продолжая таким образом, мы построим все интервалы $I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda < n)$ для каждого натурального n. Точки деления всех этих интервалов входят в множество H и образуют множество, подобное множеству всех двоично рациональных чисел, т. е. множество плотного типа. Итак, мы доказали, что каждое подмножество $H \subset C$ мощности $> \mathfrak{q}(C)$ содержит подмножество плотного типа.

II. Пусть $\mathfrak{a} = \aleph_\tau < \mathfrak{q}(C)$. Как и при последнем доказательстве, построим множество H из всех членов трансфинитной монотонной последовательности в C типа $\omega_{\tau+1}$ или $\omega^*_{\tau+1}$. Множество H не содержит подмножества плотного типа. Итак, $\mathfrak{q}(C)$ есть минимальная мощность с указанным в теореме свойством.

Теорема 3. *Имеет место* $\mathfrak{n}(C) \leqq 2^{\mathfrak{q}(C)}$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{q}(C) = \aleph_\nu$. Известно[4]), что C подобно некоторой системе трансфинитных последовательностей нулей и единиц типа $\leqq \omega_{\nu+1}$, словарно упорядоченных. Тогда C подобно некоторой непересекающейся системе одноточечных множеств и замкнутых интервалов упорядоченного континуума $V_{\omega_{\nu+1}}$[5]). Так как имеет место $q(x) < \aleph_{\nu+1}$ для

[3]) Об определении плотного типа см. *F. Hausdorff:* Grundzüge der Mengenlehre, 1914, стр. 84.

[4]) *И. Новак*, цит. соч., теоремы 2, 6, 7.

[5]) Сравни *М. Новотный (M. Novotný):* Sur la représentation des ensembles ordonnés, Fund. Math. (1952). Символом V_{ω_ν} здесь обозначено множество всех трансфинитных последовательностей нулей и единиц типа ω_ν, упорядоченное словарно, в котором отождествляются пары соседних элементов. Это упорядоченный континуум.

каждой точки $x \in C$, то мощность множества C равна или меньше мощности системы всех точек y упорядоченного континуума $V_{\omega_{\nu+1}}$ таких, что $p(y) < \aleph_{\nu+1}$.[6]) Каждая точка y такого рода допускает разложение, законченное одними нулями или одними единицами, начиная с определенного индекса. Мощность системы всех этих точек будет $\leqq 2^{\aleph_\nu}$. Итак, $\mathfrak{n}(C) \leqq 2^{\aleph_\nu} = 2^{\mathfrak{q}(C)}$.

Следствие. *Если существует недостижимое кардинальное число в узком смысле слова* $\mathfrak{a}$[7]), *то для каждого упорядоченного континуума C такого, что* $\mathfrak{n}(C) = \mathfrak{a}$, *имеет место* $\mathfrak{m}(C) = \mathfrak{a}$.[8])

Доказательство. Если бы имело место $\mathfrak{m}(C) < \mathfrak{a}$, то было бы $\mathfrak{q}(C) \leqq \mathfrak{m}(C) < \mathfrak{a}$.[9]) Отсюда $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}(C) \leqq 2^{\mathfrak{q}(C)} < \mathfrak{a}$ — противоречие.

Иным следствием теоремы 3 является следующая оценка характеристики $\mathfrak{m}(C)$: $\mathfrak{q}(C) \leqq \mathfrak{m}(C) \leqq 2^{\mathfrak{q}(C)}$. Следующая теорема 4 обеспечивает существование упорядоченного континуума, характеристиками которого $\mathfrak{q}(C)$ и $\mathfrak{m}(C)$ служат две произвольные бесконечные мощности, удовлетворяющие указанному неравенству. Доказательство теоремы 4 опирается на три леммы.

Лемма 1. *Пусть C — упорядоченный континуум, μ — произвольное данное порядковое число, $C^{\overline{\omega_\mu}}$ — словарно упорядоченная система всех трансфинитных последовательностей типа ω_μ элементов упорядоченного континуума C. Тогда C^{ω_μ} будет квазиоднородным*[10]) *упорядоченным континуумом.*

Доказательство не представляет трудностей.[11])

В работе доказана теорема: Пусть ν — произвольно заданное порядковое число. Тогда каждый упорядоченный континуум сепарабельности $\aleph_\nu$ подобен некоторой непересекающейся системе замкнутых интервалов и одноточечных множеств континуума V_{ω_ν}, покрывающего V_{ω_ν}. Однако, из доказательства этой теоремы вытекает еще следующее утверждение: если упорядоченный континуум подобен некоторой системе трансфинитных последовательностей нулей и единиц типа ω_ν при словарном упорядочении, то он подобен некоторой непересекающейся системе замкнутых интервалов и одноточечных множеств континуума V_{ω_ν}, покрывающего V_{ω_ν}.

[6]) *И. Новак:* О некоторых упорядоченных континуумах мощности $2^{\aleph_0}$, содержащих плотное подмножество мощности $\aleph_1$. Чехосл. мат. журн. *76* (1951), лемма 1.

[7]) Определение см. работу *A. Tarski:* Über unerreichbare Kardinalzahlen, Fund. Math. *30* (1938), 68—89.

[8]) Сравни работу, цитированную на стр. 75, сноска [1]), проблема 1. *М. Катетов* привел иной пример мощностей $\mathfrak{a}$ таких, что дла каждого упорядоченного континуума C мощности $\mathfrak{a}$ имеет место $\mathfrak{m}(C) = \mathfrak{a}$. Мощность $\mathfrak{a}$ определяется так: пусть $\mathfrak{a}_0 = \aleph_\varrho$ — произвольная бесконечная мощность, $\mathfrak{a}_{n+1} = 2^{\mathfrak{a}_n}$; тогда $\mathfrak{a} = \sum_{n<\omega_0} \mathfrak{a}_n$. Пусть $\mathfrak{a}$ произвольная бесконечная мощность со следующим свойством (α): $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$ влечет за собой $\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} < \mathfrak{a}$. Легко видеть, что для каждого упорядоченного континуума C мощности $\mathfrak{a}$ со свойством (α) имеет место $\mathfrak{m}(C) = \mathfrak{a}$. Приведенные Катетовым мощности, как и мощности, недостижимые в узком смысле слова, имеют свойство (α).

[9]) Сравни работу, цитированную на стр. 75, сноска [1]), теорема 6.

[10]) Определение читатель найдет в работе, цитированной на стр. 78, сноска [6]).

[11]) Ср. *М. Новотный:* Построение некоторых упорядоченных континуумов мощности $2^{\aleph_0}$. Чехосл. мат. журн. *76* (1951), 107—116, лемма.

Лемма 2. *Пусть ν — произвольное данное порядковое число. Существует такой упорядоченный континуум C_ν, что*

$$\mathfrak{q}(C_\nu) = \mathfrak{m}(C_\nu) = \aleph_\nu,\ \mathfrak{n}(C_\nu) = \aleph_\nu^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Если $\nu = 0$, то положим $C_0 = \langle 0, 1\rangle$. Итак, пусть *$\nu > 0$. Мы скажем, что точка упорядоченного континуума V_{ω_ν}*[5]) с разложением *$x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega_\nu)$ имеет свойство (с), если* существует порядковое число $\alpha < \omega_\nu$ и две последовательности индексов $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ типа ω_0 с пределом α такие, что $x_{\lambda_n} = 0$, $x_{\mu_n} = 1$. Пусть α всегда означает наименьший индекс с этим свойством. Если точка с разложением $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega_\nu)$ имеет свойство (с), то и каждая точка с разложением $u_0 u_1 \ldots u_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega_\nu)$, где $u_\lambda = x_\lambda$ для $\lambda < \alpha$, имеет свойство (с). Пусть $I_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha)$ означает множество всех этих точек. Тогда мы скажем, что интервал $I_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha)$ имеет свойство (с). Легко видеть, что все интервалы $I_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha)$ со свойством (с) замкнуты и что система $\mathfrak{S}$, образованная из всех этих интервалов, дизьюнктна.

Пусть теперь C_ν означает упорядоченное множество, элементами которого являются: 1. все интервалы $I_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}$, 2. все одноточечные множества $(x) \subset V_{\omega_\nu} - \bigcup \mathfrak{S}$. Легко видеть, что упорядоченный континуум C_ν[12]) имеет указанные в лемме свойства.

Лемма 3. *Пусть μ, ν — два произвольно заданных порядковых числа, для которых $0 < \mu \leqq \nu$. Тогда $\mathfrak{q}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu$, $\mathfrak{n}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu^{\aleph_\mu}$. Если μ изолированное число, то $\mathfrak{m}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu^{\aleph_{\mu-1}}$, если μ предельное число, то $\mathfrak{m}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \sup\limits_{\varkappa<\mu} \aleph_\nu^{\aleph_\varkappa}$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathfrak{q}(C_\nu^{\omega_\mu}) \leqq \aleph_\nu$. С другой стороны имеет место[6]) $\mathfrak{q}(C_\nu^{\omega_\mu}) \geqq \mathfrak{q}(C_\nu) = \aleph_\nu$, так что $\mathfrak{q}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu$. Очевидно, будет $\mathfrak{n}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu^{\aleph_\mu}$. Пусть $\mathbf{0}$ — первая точка в C_ν. Система H всех элементов $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega_\mu) \in C_\nu^{\omega_\mu}$ таких, что существует $\pi < \omega_\mu$ со свойством $x_\lambda = \mathbf{0}$ для $\lambda > \pi$, образует по лемме 1 плотное в $C_\nu^{\omega_\mu}$[13]) подмножество. С другой стороны, для каждого $\varkappa < \mu$, $C_\nu^{\omega_\mu}$ содержит непересекающуюся систему интервалов, подобную $C_\nu^{\omega_\varkappa}$. Отсюда легко вытекает[9],) что $\mathfrak{m}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \aleph_\nu^{\aleph_{\mu-1}}$ для изолированного μ и $\mathfrak{m}(C_\nu^{\omega_\mu}) = \sup\limits_{\varkappa<\mu} \aleph_\nu^{\aleph_\varkappa}$ для предельного μ.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — две произвольно заданные бесконечные мощности такие, что $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq 2^{\mathfrak{a}}$. Тогда существует упорядоченный континуум K так, что $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{b}$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{a} = \aleph_\nu$. Тогда имеет место одна из следующих трех возможностей: 1. $\aleph_\nu \leqq \mathfrak{b} \leqq \aleph_\nu^{\aleph_0}$; 2. $\aleph_\nu^{\aleph_{\mu-1}} \leqq \mathfrak{b} \leqq \aleph_\nu^{\aleph_\mu}$ для подходящего изолированного μ, $0 < \mu \leqq \nu$; 3. $\sup\limits_{\varkappa<\mu} \aleph_\nu^{\aleph_\varkappa} \leqq \mathfrak{b} \leqq \aleph_\nu^{\aleph_\mu}$ для под-

---

[12]) Ср. работу, цитированную на стр. 78, сноска [6]), теорема 1.

[13]) Ср. книгу, цитированную на стр. 77, сноска [3]), стр. 89.

ходящего предельного μ, $0 < \mu \leqq \nu$. Положим $K' = C_\nu$ в первом случае и $K' = C_\nu^{\omega_\mu}$ во втором и третьем случае. В K' существует подмножество H мощности $\mathfrak{b}$ по лемме 2 и 3. Положим $P_x = K'$ для $x \in H$, и пусть P_x будет произвольным одноточечным множеством для $x \in K' - H$. Пусть K — множество всех пар (x, y), где $x \in K'$, $y \in P_x$, упорядоченных так: $(x, y) < (x', y')$, если $x < x'$ в K' или $x = x'$ и $y < y'$ в P_x. Множество K является упорядоченным континуумом.[14]) Очевидно, имеет место $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(K') = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}(K) =$ мощность $H = \mathfrak{b}$.

Некоторые упорядоченные континуумы, приведенные в работах Новака и моих, не являются ни квазиоднородными, ни симметрическими. Поэтому Новак предложил проблему[15]), можно ли для данного упорядоченного континуума построить квазиоднородный и симметрический упорядоченный континуум так, чтобы сохранились некоторые характеристики.

Теорема 5. *Пусть C — упорядоченный континуум, $\mathfrak{a}$ — произвольная мощность $< \mathfrak{p}(C)$. Тогда существует квазиоднородный упорядоченный континуум K так, что $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C)$.*

Доказательство. Пусть $H \subset C$ — подмножество, плотное в C, мощность которого есть $\mathfrak{m}(C)$. Пусть $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ означает соответственно первый и последний элемент в C, пусть $y \in C$ — точка, для которой $p(y) > \mathfrak{a}$. Предположим $y \in C - H$, $\mathbf{0} \in H$, $\mathbf{1} \in H$.

Мы скажем, что элемент $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega_0)$ упорядоченного континуума C^{ω_0} имеет свойство (α), если существует $\pi < \omega_0$ так, что $x_\pi \in C - H$. Пусть $\pi < \omega_0$ всегда означает минимальный индекс такого свойства. Аналогично доказателству леммы 2, построим систему $\mathfrak{S}$ всех интервалов $I_{x_0 x_1 \ldots x_\pi}$ со свойством (α).

Пусть теперь K означает упорядоченное множество, элементами которого являются: 1. все интервалы $I_{x_0 x_1 \ldots x_\pi} \in \mathfrak{S}$, 2. все одноточечные множества $(x) \subset C^{\omega_0} - \bigcup \mathfrak{S}$. Упорядоченный континуум K[12]) будет квазиоднородным. Он содержит непересекающуюся систему интервалов мощности $\mathfrak{m}(C)$ и в то же время плотное в K подмножество мощности $\mathfrak{m}(C)$, так что $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$.[9]) Легко доказать, что для каждой точки $k \in K$ найдется точка $c \in C$ так, что $p(k) \leqq p(c)$, $q(k) \leqq q(c)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(K) \leqq \mathfrak{q}(C)$. Однако, имеет место[6]) $\mathfrak{q}(C) \leqq \mathfrak{q}(K)$, так что $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$. Наконец, интервал $I_y \in \mathfrak{S}$ является точкой в K, для которой $p(I_y) = p(y)$. Следовательно, $\mathfrak{p}(K) \geqq p(y) > \mathfrak{a}$.

Следствие. *Пусть C — упорядоченный континуум, характеристика которого $\mathfrak{p}(C)$ представляет максимум нижних характеров. Тогда существует квазиоднородный упорядоченный континуум K так, что $\mathfrak{p}(K) = \mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$.*

---

[14]) Ср. работу, цитированную на стр. 75, сноска [1]), теорема 8.

[15]) Ср. работу, цитированную на стр. 75, сноска [1]), проблема 3.

Теорема 6. *Пусть C — упорядоченный континуум, $\mathfrak{a}$ — произвольная мощность $< \mathfrak{p}(C)$. Тогда существует симметрический квазиоднородный порядоченный континуум K так, что $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C)$.*

Доказательство. Пусть K_1 — множество, подобное C^*[2]) и такое, что $K_1 \cap C = 0$. В порядковой (ординальной) сумме[16]) $C \cup K_1$ отождествим первую точку в K_1 с последней в C; полученный таким образом симметрический упорядоченный континуум C_1 содержит симметрическое подмножество H, плотное в C_1, такое, что первая и последняя точка из C_1 лежит в H, а точка $y \in C_1$, для которой $p(y) > \mathfrak{a}$, лежит в множестве $C_1 - H$.

По последней теореме теперь можно построить квазиоднородный упорядоченный континуум K так, что $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C_1) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C_1) = \mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C_1) = \mathfrak{p}(C)$. Легко доказать, что упорядоченный континуум K будет симметрическим.

Следствие. *Пусть C — упорядоченный континуум, характеристика которого $\mathfrak{p}(C)$ представляет максимум нижних характеров. Тогда существует симметрический квазиоднородный упорядоченный континуум K так, что $\mathfrak{p}(K) = \mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$.*

Résumé.

SUR UNE CARACTÉRISTIQUE DU CONTINU ORDONNÉ.

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno.

(Reçu le 15 avril 1952.)

M. J. Novák désigne[1]) par $\mathfrak{n}(C)$ la puissance, par $\mathfrak{m}(C)$ la séparabilité, par $\mathfrak{p}(C)$ le supremum des caractères inférieures et par $\mathfrak{q}(C)$ le supremum des caractères supérieurs des points du continu ordonné C. Les puissances $\mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{n}(C)$ sont appelées *caractéristiques* du continu ordonné C. L'objet de ce travail est l'étude de la caractéristique $\mathfrak{q}(C)$.

Théorème 1. *La puissance $\mathfrak{q}(C)$ est la puissance minimum $\mathfrak{a}$ présentant la propriété suivante: Tout sous-ensemble $H \subset C$ de puissance $> \mathfrak{a}$ contient au moins un point divisant H en deux sous-ensembles de puissance $> \mathfrak{a}$.*

Théorème 2. *La puissance $\mathfrak{q}(C)$ est la puissance minimum $\mathfrak{a}$ présentant la propriété suivante: Tout sous-ensemble $H \subset C$ de puissance $> \mathfrak{a}$ contient un ensemble d'un type dense.*

Théorème 3. *On a* $\mathfrak{n}(C) \leqq 2^{\mathfrak{q}(C)}$.

---

[16]) Ср. книгу, цитированную на стр. 77, сноска [3]), стр. 75.

[1]) *J. Novák:* О некоторых характеристиках упорядоченного котинуума, Чехосл. мат. журн. 77 (1952).

Corrolaire. *S'il existe un nombre cardinal inaccessible au sens strict* $\mathfrak{a}$[2]), *on a* $\mathfrak{m}(C) = \mathfrak{a}$ *pour tout continu ordonné* C *tel que* $\mathfrak{n}(C) = \mathfrak{a}$.

Théorème 4. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *étant deux puissances infinies données quelconques telles que* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq 2^{\mathfrak{a}}$, *il existe un continu ordonné* K *tel que* $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{b}$.

Théorème 5. *Soit* C *un continu ordonné,* $\mathfrak{a}$ *une puissance quelconque* $< \mathfrak{p}(C)$. — *Thèse: Il existe un continu ordonné quasihomogène*[3]) K *tel que* $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C)$.

Corrolaire. *Soit* C *un continu ordonné dont la caractéristique* $\mathfrak{p}(C)$ *est le maximum des caractères inférieurs.* — *Thèse: Il existe un continu ordonné quasihomogène* K *tel que* $\mathfrak{p}(K) = \mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$.

Théorème 6. *Soit* C *un continu ordonné,* $\mathfrak{a}$ *une puissance quelconque* $< \mathfrak{p}(C)$. — *Thèse: Il existe un continu ordonné quasihomogène et symmétrique* K *tel que* $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{p}(K) \leqq \mathfrak{p}(C)$.

Corrolaire. *Soit* C *un continu ordonné dont la caractéristique* $\mathfrak{p}(C)$ *est le maximum des caractères inférieurs.* — *Thèse: Il existe un continu ordonné quasihomogène et symmétrique* K *tel que* $\mathfrak{p}(K) = \mathfrak{p}(C)$, $\mathfrak{q}(K) = \mathfrak{q}(C)$, $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}(C)$.

---

[2]) *A. Tarski:* Über unerreichbare Kardinalzahlen, Fund. Math. *30* (1938), 68—89.

[3]) *J. Novák:* On some ordered continua of power $2^{\aleph_0}$ containing a dense subset of power $\aleph_1$, Czechosl. math. Journ. *76* (1951), 63—79.