Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. VI

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 4, 297–331

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100055

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Центральный математический институт
Т. 2 (77) ПРАГА 15. I. 1953 • № 4

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ VI

ЕДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 23/IX 1952 г.)

В настоящей статье формулируется задача отыскания всех таких соответствий между двумя пространствами S_n и S'_n, для которых при подходящем выборе касательных коллинеаций K в каждой точке A пространства S_n существует K-главная гиперплоскость. Тривиальным подслучаем являются соответствия расслоемые на ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями. Задача распадается на две: отыскание проективных изгибаний слоя гиперповерхностей, и отыскание проективных изгибаний неголономной гиперповерхности. В настоящей статье найдены все такие соответствия, которые дают двумя различными способами решение поставленной задачи. Предыдущие статьи настоящей серии обозначаются просто римскими цифрами.

1. Если дано соответствие между двумя линейными n-мерными пространствами S_n и S'_n, то мы знаем (I, § 1), что каждой паре A, B взаимно соответствующих точек можно сопоставить (даже ∞^n способами) *касательную коллинеацию* с тем свойством, что если Γ произвольная кривая пространства S_n, проходящая через A, то её образ Γ' при данном соответствии и её образ $K\Gamma$ при коллинеации K имеют в точке B аналитическое касание первого порядка. Мы знаем (I, § 9), что в связке A существуют исключительные прямые, которые мы назвали *K-главными*, обладающие тем свойством, что если касательная t кривой Γ в точке A — K-главная (и только тогда), то Γ' и $K\Gamma$ имеют в точке B аналитическое касание *второго* порядка. Далее мы знаем (I, § 13), что если $n > 1$, то только в тривиальном случае *коллинейного* соответствия между S_n и S'_n можно выбрать касательную коллипеацию K (для каждой точки A пространства S_n) так, что *каждая* прямая связки A — K-главная.

2. Предметом этой статьи и нескольких следующих является изучение таких неколлинейных соответствий между S_n и S'_n, у которых для каждой точки A пространства S_n можно выбрать касательную коллинеацию K так, что в связке A существует гиперплоскость (назовем её *K-главной гиперплоскостью точки* A) обладающая тем свойством, что каждая прямая проходящая через A и лежащая в рассматриваемой гиперплоскости — K-главная. Будем предполагать, что $n \geqq 3$, ибо для $n = 1$ и для $n = 2$ *каждое* соответствие между S_n и S'_n принадлежит к рассматриваемому типу.

Аналитически наша задача выражается простым свойством *K-линеаризирующего преобразования* [см. I (9,3)]

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1, \ldots, \Omega_n). \tag{2,1}$$

Это свойство заключается в том, что *все квадратичные дифференциальные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ имеют общий линейный делитель*

$$\vartheta = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n; \tag{2,2}$$

K-главная гиперплоскость точки A будет семейством всех тех прямых

$$[A, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n], \tag{2,3}$$

для которых $\vartheta = 0$. После сокращения на общий делитель ϑ можно записать (2,1) в виде

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{2,4}$$

где φ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ — линейные формы в $\omega_1, \ldots, \omega_n$; стало быть, (2,4) определяет коллинейное преобразование связки A, которое мы назовем *K-линеаризирующей коллинеацией* и обозначим буквой Λ. Может случиться, что коллинеация Λ вырожденная; но для общего положения точки A невозможно иметь $\varphi_i = 0$ *тождественно* для $1 \leqq i \leqq n$, ибо мы рассматриваем лишь *неколлинейные соответствия* между S_n и S'_n.

Пусть [см. I (5,2)]

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n \tag{2,5}$$

есть аналитическое выражение касательной коллинеации K. Тогда [см. I (10,1)]

$$K^*A = B,\ K^*A_1 = B_1 - \mu_1 B, \ldots, K^*A_n = B_n - \mu_n B \tag{2,6}$$

дает выражение самой общей касательной коллинеации K^*. При переходе от K к K^* нужно заменить [см. I, (10,2) и (10,3)] формы Ω_i на формы

$$\Omega_i^* = \Omega_i - 2\omega_i(\mu_1\omega_1 + \ldots + \mu_n\omega_n) \ (1 \leqq i \leqq n),$$

которые при общем выборе чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$ уже не будут иметь общего делителя, так что, вообще говоря, K-главная гиперплоскость не будет K^*-главной (как правило, никакой K^*-главной гиперплоскости существовать не будет). Однако, если

$$\mu_i = \mu a_i \ (1 \leqq i \leqq n),$$

где a_i — коэфициенты формы Пфаффа (2,2), т. е. если

$$K^*A = B, \ K^*A_i = B_i - \mu a_i B \ (1 \leqq i \leqq n), \qquad (2,7)$$

то K-главная гиперплоскость одновременно и K^*-главная. При переходе от (2,5) к (2,7) K-линеаризирующая коллинеация (2,4) перейдет в K^*-линеаризирующую коллинеацию

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\varphi_1 - 2\mu\omega_1, \ldots, \varphi_n - 2\mu\omega_n). \qquad (2,8)$$

3. Задача формулированная в начале § 2 распадается на две в зависимости от того, имеет-ли место уравнение $[\vartheta \mathrm{d} \vartheta] = 0$, где ϑ означает форму Пфаффа (2,2) определяющую K-главные гиперплоскости. В случае $[\vartheta \mathrm{d} \vartheta] = 0$ мы говорим, что имеет место *голономный тип*, в случае же $[\vartheta \mathrm{d} \vartheta] \neq 0$ — *неголономный*.

В случае голономного типа уравнение Пфаффа $\vartheta = 0$ вполне интегрируемо; оно определяет в пространстве S_n *слой гиперповерхностей*, которые мы назовем *K-главными гиперповерхностями*; через каждую точку A пространства S_n (точнее, через каждую точку некоторой области пространства S_n) проходит одна и только одна K-главная гиперповерхность, касательная гиперплоскость которой в точке A служит K-главной гиперплоскостью точки A. Из определения K-главной гиперплоскости и из классического определения проективного изгибания (G. Fubini) следует, что при соответствии голономного типа *каждая K-главная гиперповерхность проективно изгибается*. Ввиду этого мы назовем голономный тип соответствий с K-главной гиперплоскостью кратко *проективным изгибанием слоя гиперповерхностей*. Значит, проективное изгибание слоя гиперповерхностей — это соответствие между S_n и S_n', обладающее тем свойством, что S_n распадается на ∞^1 гиперповерхностей, каждая из которых при заданном соответствии проективно изгибается. Через каждую точку A пространства S_n проходит определенная гиперповерхность из рассматриваемого слоя гиперповерхностей; о коллинеации, соответствующей точке A, предполагается не только, что она реализует проективное изгибание этой гиперповерхности, но кроме того ещё, что она служит касательной коллинеацией рассматриваемого соответствия между S_n и S_n'. Итак, задача проективного изгибания слоя гиперповерхностей никоим образом не сводится к задаче проективного изгибания одной гиперповерхности. Коллинеация K, соответствующая заданной точке A, обладает вследствие этого тем свойством, что если Γ — произвольная кривая пространства S_n, проходящая через точку A, то если Γ' обозначает соответствующую кривую пространства S_n', проходящую через образ B точки A, всегда должно иметь место аналитическое касание кривых Γ' и $K\Gamma$ в точке B, если же кривая Γ лежит на K-главной гиперповерхности, проходящей через A, то должно иметь место аналитическое касание второго порядка между Γ' и $K\Gamma$ в точке B. Легко показать, что упомянутых свойств коллинеации K недостаточно для однозначного определения коллинеации K, если выберем репер так, что K выражена равенствами (2,5) и что K-главная гиперплоскость точки A содержит те прямые (2,3), для которых $\omega_n = 0$, то всё ещё можно, взамен коллинеации K, взять коллинеацию K^* определенную равенствами

$$K^*A = B,\ K^*A_i = B_i\ (1 \leqq i \leqq n-1), \qquad (3,1)$$
$$K^*A_n = B_n + \lambda B,$$

где λ — произвольное число.

В случае неголономного типа уравнение Пфаффа $\vartheta = 0$ не вполне интегрируемо и определяет то, что иногда называют „неголономной гиперповерхностью"; ввиду этого неголономный тип соответствий с K-главной гиперповерхностью мы можем назвать *проективным изгибанием неголономной гиперповерхности*.

4. K-главная гиперплоскость ϱ точки A иногда, но не обязательно, является одновременно K-главной гиперповерхностью других точек $X \neq A$ лежащих в ϱ. Самым простым является тот случай, когда каждая гиперплоскость ϱ пространства S_n, которая служит K-главной для *некоторой* своей точки, всегда служит K-главной для *каждой* своей точки. Это очевидно частный случай голономного типа, обладающий тем характеристическим свойством, что каждая K-главная гиперповерхность — гиперплоскость. Так как каждое проективное изгибание гиперплоскости коллинейно (см. Élie Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces*, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) **37**, 1920, 259—356, стр. 344 для $n = 2$; впрочем легко показать, что наше утверждение является простым следствием теоремы I, § 13), рассматриваемое соответствие *распадается на коллинейные преобразования тех* ∞^1 *гиперплоскостей*, которые служат K-главными гиперповерхностями. Подтвердим сказанное прямым вычислением. Выберем репер так, что K-главные

гиперповерхности (в нашем случае гиперплоскости) составлены из тех прямых (2,3), для которых имеет место $\omega_n = 0$; кроме того, очевидно, нужно предположить, что касательная коллинеация задана уравнениями (2,5). Так как гиперплоскость $\varrho = [AA_1 \ldots A_{n-1}]$ постоянна для $\omega_n = 0$, мы имеем

$$[\omega_{in}\varkappa_n] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1); \tag{4,1}$$

кроме того ϱ есть K-главная гиперплоскость точки A, так что квадратичные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ будут делиться на ω_n; следовательно [I (5,15)]

$$[\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_n] = [\tau_{ij}\omega_n] = 0 \tag{4,2}$$

для

$$1 \leqq i \leqq n-1, \ 1 \leqq j \leqq n, \ i \neq j.$$

Те уравнения (4,2), у которых $j = n$, устанавливают, что лдя $\omega_n = 0$ гиперплоскость $\sigma = [BB_1 \ldots B_n]$ также постоянна. Но из (2,5) получится дифференцированием

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}B, \ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \sum_{j=0}^{n} \tau_{ij}B_j \ (1 \leqq i \leqq n),$$

так что из (4,2) следует, что для $\omega_n = 0$ имеет место

$$\mathrm{d}K \,.\, A = \tau_{00}B, \ \mathrm{d}K \,.\, A_i = \tau_{00}B_i \ (1 \leqq i \leqq n),$$

что значит, что для $\omega_n = 0$ часть коллинеации K относящаяся к гиперплоскости ϱ постоянна, что и требовалось доказать.

Наоборот предположим, что дано такое соответствие между S_n и S'_n, что в пространстве S_n существует система ∞^1 гиперплоскостей $\varrho = \varrho(t)$, зависящая от параметра t так, что заданное соответствие переводит каждую гиперплоскость $\varrho(t)$ в некоторую гиперплоскость $\sigma = \sigma(t)$ пространства S'_n, причем частное соответствие $H = H(t)$ между точками гиперплоскости $\varrho(t)$ с одной стороны, гиперплоскости $\sigma(t)$ с другой — коллинейное. Выберем реперы в S_n и S'_n так, что $\varrho = [AA_1 \ldots A_{n-1}]$, $\sigma = [BB_1 \ldots B_{n-1}]$, $HA = B$, $HA_1 = B_1$, ..., $HA_{n-1} = B_{n-1}$, причем, предполагая определенный выбор точек $A, A_1, \ldots, A_n$, B, B_1, ..., B_{n-1}, мы сохраняем возможность самого удобного выбора точки B_n, пока подлежащего лишь очевидному условию $[BB_1 \ldots B_n] \neq 0$. Так как гиперплоскости ϱ, σ постоянны для постоянного t, то [при обычных обозначениях I, (5,3)—(5,6), (5,10), (5,11)]

$$[\omega_n \, \mathrm{d}t] = [\tau_{0n} \, \mathrm{d}t] = [\omega_{in} \, \mathrm{d}t] = [\tau_{in} \, \mathrm{d}t] = 0$$

для

$$1 \leqq i \leqq n-1.$$

Факт, что коллинейное соответствие H постоянно для постоянного t, выражается равенствами

$$[\tau_{0j}\,\mathrm{d}t] = [\tau_{ii} - \tau_{00}\,\mathrm{d}t] = [\tau_{ij}\,\mathrm{d}t] = 0$$

для
$$1 \leqq i \leqq n-1,\ 1 \leqq j \leqq n,\ i \neq j.$$

Стало быть, $\tau_{0j} = \lambda_j \omega_n$ $(1 \leqq j \leqq n)$, так что

$$\mathrm{d}B = (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + \sum_{j=1}^{n} (\omega_j + \lambda_j \omega_n)\,B_j$$

и если, взамен точки B_n вводить точку $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j B_j$, на что мы имеем право, то получается просто

$$\mathrm{d}B = (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + \sum_{j=1}^{n} \omega_j B_j,$$

и это значит, что (2,5) определяет касательную коллинеацию K рассматриваемого соответствия, для которой очевидно имеет место (4,2), так что гиперплоскости $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$ — K-главные.

Следовательно, частным случаем голономного типа соответствий с K-главными гиперплоскостями являются те соответствия между S_n и S'_n, которые распадаются на ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями обоих пространств S_n, S'_n. Этот частный случай соответствий с K-главными гиперплоскостями мы назовем *тривиальным случаем*; в следующем мы будем им пренебрегать.

5. Главной целью настоящей статьи является изучение тех соответствий между S_n и S'_n, которые *двумя различными способами* принадлежат к типу описанному в § 2, т. е. таких соответствий, у которых каждой точке A пространства S'_n можно сопоставить две (различные или совпадающие) касательные коллинеации K_1, K_2 так, что через точку A проходят две различных гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2, причем ϱ_1 K_1-главная, ϱ_2 — K_2-главная. Докажем прежде всего, что *без нарушения общности можно считать* $K_1 = K_2$.

Итак, пусть $K_1 \neq K_2$; нужно показать, что для каждой точки A пространства S_n существует касательная коллинеация K' такая, что обе гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2 — K'-главные.

Будем специализировать реперы так, что во первых $K_2 = K$, где K дана равенствами (2,5), и во вторых, что прямая (2,3) лежит в гиперплоскости ϱ_1, если $\omega_1 = 0$, а в гиперплоскости ϱ_2, если $\omega_2 = 0$. Если K_1 дана равенствами (2,6) (где $K^* = K_1$), то вследствие § 2 существуют линейные формы φ_i, ψ_i в переменных $\omega_1, \ldots, \omega_n$ так, что

$$\Omega_i = \varphi_i\omega_1,$$
$$\Omega_i - 2\omega_i(\mu_1\omega_1 + \ldots + \mu_n\omega_n) = \psi_i\omega_2$$
$$(1 \leqq i \leqq n).$$

Следовательно

$$\varphi_i\omega_1 - \psi_i\omega_2 = 2\omega_i(\mu_1\omega_1 + \ldots + \mu_n\omega_n)$$
$$(1 \leqq i \leqq n),$$

из чего легко вытекает, что $\mu_i = 0$ для $3 \leqq i \leqq n$ и что

$$\varphi_1 = a_1\omega_2 + 2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2),\ \psi_1 = a_1\omega_1,$$
$$\varphi_2 = a_2\omega_2,\ \psi_2 = a_2\omega_1 - 2(\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2),$$
$$\varphi_i = a_i\omega_2 + 2\mu_1\omega_i,\ \psi_i = a_i\omega_1 - 2\mu_2\omega_i$$
$$(3 \leqq i \leqq n);$$

тогда для касательной коллинеации K' определенной равенствами

$$K'A = B,\ K'A_1 = B_1 - \mu_1 B,\ K'A_i = B_i\ (2 \leqq i \leqq n)$$

взамен квадратичных форм Ω_i имеем формы $\Omega'_i = \Omega_i - 2\mu_1\omega_1\omega_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, так что

$$\Omega'_1 = (a_1 + 2\mu_2)\,\omega_1\omega_2,\ \Omega'_2 = (a_2 - 2\mu_1)\,\omega_1\omega_2,$$
$$\Omega'_i = a_i\omega_1\omega_2 \qquad (3 \leqq i \leqq n)$$

и обе гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2 — K'-главные.

Итак, утверждение, формулированное выше, доказано. Ввиду этого, во всем дальнейшем мы можем предполагать, что обе гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2 — K-главные, где K означает касательную коллинеацию, заданную равенствами (2,5). Если прямая (2,3) лежит в ϱ_1 для $\vartheta_1 = 0$, а в ϱ_2 для $\vartheta_2 = 0$, где

$$\vartheta_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n,\ \vartheta_2 = b_1\omega_1 + \ldots + b_n\omega_n,$$

то квадратичные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ имеют вид $a_i\vartheta_1\vartheta_2$. Значит, речь идет о соответствиях с тотально K-линеаризирующей прямой, вполне определенных в наших статьях II и III. Наоборот, если дано соответствие с тотально K-линеаризирующей прямой, так что [см. II (14,1)]

$$\Omega_i = a_i\Omega\ (1 \leqq i \leqq n), \tag{5,1}$$

то если ранг квадратичной формы Ω больше двух, не существует никакой K-главной гиперплоскости. Если же ранг формы Ω равен двум, то существуют две, и только две, K-главных гиперплоскости и K-главный конус вырождается в эти две гиперплоскости. Если же ранг формы Ω равен единице, то существует единственная K-главная гиперплоскость и K-главный конус вырождается в двойную K-главную гиперплоскость.

В следующем мы будем изучать постепенно все виды соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, у которых ранг формы Ω равен единице или двум и будем исследовать, когда будет иметь место голономный тип. Начнём замечанием, что в случае развёртывающихся соответствий (см. II § 24) форма Ω имеет ранг 1, так что существует единственная K-главная гиперплоскость; из II § 24 очевидно, что это — подслучай тривиального случая, входящего в голономный тип.

Если $n \geqq 4$, то из II вытекает, что за исключением развёртывающихся соответствий существуют только такие соответствия с тотально K-линеаризирующей прямой, у которых все тотально K-линеаризирующие прямые проходят через неподвижную точку. Ранг r квадратичной формы Ω [см. (5,1)] в этом случае имеет произвольное значение, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqq r \leqq n$; однако для $r = 1$, согласно V § 2, получаем лишь частный случай развёртывающихся соответствий, так что нам нужно исследовать только случай $r = 2$. В этом случае для каждой точки A пространства S_n существуют две, и только две, K-главных гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2. Мы увидим, что, вообще говоря, голономный случай не имеет места ни относительно ϱ_1 ни относительно ϱ_2, но что возможен голономный тип относительно одной из гиперплоскостей ϱ_1, ϱ_2, и возможен также голономный тип одновременно относительно ϱ_1 и ϱ_2. Подробное изучение всех случаев для $n \geqq 3$ является предметом §§ 6—11 настоящей статьи.

В случае $n = 3$ существуют еще другие виды соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, которые мы вполне определили в статье III. Мы увидим (§§ 12—17), что у всех этих видов квадратичная форма Ω имеет ранг 2, так что существуют две различных K-главных гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2; увидим также, что во всех этих случаях имеет место голономный тип одновременно относительно ϱ_1 и относительно ϱ_2.

6. Теперь удобно вспомнить о геометрическом построении всех соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, проходящей через неподвижную точку, которую будем называть *полюсом* рассматриваемого соответствия; речь идёт о построении обоснованном в II § 19. Построение предполагает надлежащий выбор обоих пространств, достижимый с помощью их предварительного коллинейного преобразования. Именно предполагается, что оба пространства S_n, S'_n являются гиперплоскостями вспомагательного $(n + 1)$-мерного линейного пространства S_{n+1}. Исходным пунктом упомянутого построения является произвольная (n-мерная) гиперплоскость (C), которую для краткости мы будем называть *основной гиперплоскостью* соответствия; кроме того нужно в S_{n+1} выбрать две различных неподвижных точки, в цитированном параграфе обозначенные C_n, C_{n+1}, которые мы теперь назовем *проекторами*; предполагается, что основная гиперповерхность (C) не является гиперплоскостью, что проектор C_{n+1} не лежит в S_n и что проектор C_n не лежит в S'_n; помимо того, оба проекторы должны лежать вне основной плоскости. Соответствие между S_n и S'_n возникнет проектированием основной гиперповерхности (C). А именно, точка B пространства S'_n, соответствующая заданной точке A пространства S_n, построится следующим образом: прямая AC_{n+1} пространства S_{n+1} пересекает основную гиперповерхность (C) в точке C, а прямая CC_n пространства S_{n+1} пересекает S'_n в искомой точке B. Очевидно, что выбор гиперплоскостей S_n, S'_n в пространстве S_{n+1} совсем не имеет значения, существенное же значение имеет выбор основной гиперповерхности (C) и обоих проекторов C_{n+1}, C_n. Полюсом рассматриваемого соответствия служит (см. II § 19) точка пересечения прямой C_nC_{n+1} с пространством S_n.

При специализации реперов, избранной в II § 19, имеем

$$\omega_{ni} = 0 \ (0 \leqq i \leqq n-1), \tag{6,1}$$

$$\tau_{0n} = 0,\ \tau_{ik} = 0 \ (0 \leqq i \leqq n,\ 0 \leqq k \leqq n-1), \tag{6,2}$$

$$\Omega_i = 0 \ (1 \leqq i \leqq n-1),\ \ \Omega_n = \Omega = \sum_{i=1}^{n} \tau_{in}\omega_n,\ \ \tau_{in} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_i}. \tag{6,3}$$

Тотально K-линеаризирующие прямые суть $[AA_n]$, полюсом является точка A_n; K-главный конус состоит из тех прямых (2,3), для которых $\Omega = 0$. Касательные основной гиперповерхности в точке C даны выражением

$$[C, \omega_1 C_1 + \ldots + \omega_{n-1}C_{n-1} + \omega_n(C_n + C_{n+1})]; \tag{6,4}$$

те прямые (6,4), для которых $\Omega = 0$, суть *асимптотические касательные* основной гиперповерхности, так что K-главный конус получим, проектируя асимптотический конус основной гиперповерхности из точки C_{n+1} на гиперплоскость S_n. Так как уравнение $\Omega = 0$ определяет асимптотический конус гиперповерхности (C), ясно, что эта гиперповерхность является огибающей системы ∞^r гиперплоскостей, где r — ранг квадратичной формы Ω. Как мы уже сказали в § 5, у задачи, которая здесь нас интересует, надо исследовать только случай $r = 2$. Однако, пока пусть r останется произвольным.

Удобно ввести пространство Σ_{n+1} дуальное к пространству S_{n+1}. Если X любая точка пространства S_{n+1}, а Ξ любая гиперплоскость того же пространства (или точка пространства Σ_{n+1}), то соотношение между S_{n+1} и Σ_{n+1} дано билинейной формой $X \,.\, \Xi$, причем $X \,.\, \Xi = 0$ тогда и только тогда, если в пространстве S_{n+1} точка X лежит в гиперплоскости Ξ. Касательная гиперплоскость Δ основной гиперповерхности (C) в точке C является точкой пространства Σ_{n+1} и описывает в этом пространстве r-мерное многообразие (Δ). Соотношение между C и Δ выражается аналитически уравнениями

$$C \,.\, \Delta = 0,\ \mathrm{d}C \,.\, \Delta = 0, \tag{6,5}$$

которые можно написать в виде

$$C \,.\, \Delta = 0,\ C \,.\, \mathrm{d}\Delta = 0, \tag{6,6}$$

ибо из $C \,.\, \Delta = 0$ дифференцированием вытекает $\mathrm{d}C \,.\, \Delta + C \,.\, \mathrm{d}\Delta = 0$. Уравнение (6,6) имеет то значение, что в пространстве Σ_{n+1} C — гиперплоскость, проходящая через r-мерное касательное пространство многообразия (Δ). Так как в $(n+1)$-мерном пространстве Σ_{n+1} через данное r-мерное пространство проходят ∞^{n-r} гиперплоскостей, и так как C пробегает ∞^n различных положений, то r-мерное многообразие (Δ) не может иметь менее чем ∞^r различных касательных пространств, так что касательное пространство многообразия (Δ) в его текущей точке Δ касается многообразия в этой единственной точке Δ. В случае $r = 2$, который один имеет значение для нашей цели, сказанное значит, что (Δ) — *неразвертывающаяся поверхность* пространства Σ_{n+1}. Легко убедиться, что при заданном r многообразие r измерений (Δ) пространства Σ_{n+1} подлежит лишь тому условию, что оно имеет ∞^r (а не менее) касательных пространств.

Из уравнений II (19,7) вытекает, что касательная гиперплоскость Δ основной гиперповерхности (C) геометрически постоянна тогда и только тогда, если

$$\tau_{in} = 0 \ (1 \leq i \leq n).$$

В силу того, что $\tau_{in} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \omega_i}$ и что ранг формы Ω равен r, между уравнениями (6,7) найдётся r, и только r, линейно независимых. Геометрически ясно, что если $t_1, \ldots, t_r$ параметры, при помощи которых можно представить r-мерное многообразие (Δ) пространства Σ_{n+1}, то уравнения (6,7) равносильны уравнениям

$$\mathrm{d}t_1 = \ldots = \mathrm{d}t_r = 0,$$

из чего вытекает, что система (6,7) вполне интегрируема. Аналитически тот же самый факт является следствием уравнений

$$[\mathrm{d}\tau_{in}] = \sum_{k=1}^{n-1} [\omega_{ik}\tau_{kn}] + [\tau_{in}\tau_{nn} + \omega_{nn}] + [\omega_{in}\tau_{nn}]$$
$$(1 \leqq i \leqq n-1),$$
$$[\mathrm{d}\tau_{nn}] = 0,$$

вытекающих из (6,1) и (6,2).

Выше мы упомянули, что в пространстве S_{n+1} касательная основной гиперповерхности (C) в точке C — асимптотическая тогда и только тогда, если уравнение $\Omega = 0$ равносильно уравнению

$$\mathrm{d}^2C \,.\, \Delta = 0. \tag{6,7}$$

Из (6,5) вытекает, что имеется тождественно $\mathrm{d}^2C \,.\, \Delta + \mathrm{d}C \,.\, \mathrm{d}\Delta = 0$, так что уравнение (6,7) равносильно с уравнением $\mathrm{d}C \,.\, \mathrm{d}\Delta = 0$; но в силу (6,6) имеется кроме того тождество $\mathrm{d}C \,.\, \mathrm{d}\Delta + C \,.\, \mathrm{d}^2\Delta = 0$, так что уравнение (6,7) или уравнение $\Omega = 0$ является равносильным с уравнением

$$C \,.\, \mathrm{d}^2\Delta = 0. \tag{6,8}$$

7. Пусть теперь $r = 2$ в рассуждениях § 6. Значит, ранг квадратичной формы Ω равен двум, так что

$$\Omega = \vartheta_1\vartheta_2, \tag{7,1}$$

$$\vartheta_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n,\ \vartheta_2 = b_1\omega_1 + \ldots + b_n\omega_n, \tag{7,2}$$

$$[\vartheta_1\vartheta_2] = 0. \tag{7,3}$$

В каждой точке A пространства S_n имеются две различных K-главных гиперплоскости ϱ_1, ϱ_2; прямая (2,3) лежит **в** ϱ_1 для $\vartheta_1 = 0$, а в ϱ_2 для $\vartheta_2 = 0$. Надо установить, когда настанет голономный тип например относительно K-главной гиперплоскости ϱ_1, т. е. когда уравнение $\vartheta_1 = 0$ вполне интегрируемо.

Согласно § 6 мы имеем в вспомогательном пространстве S_{n+1} основную гиперповерхность (C) с ∞^2 касательными гиперплоскостями, так что касательные гиперплоскости Δ гиперповерхности (C) образуют в дуальном пространстве Σ_{n+1} поверхность (двух измерений) (Δ), которая неразвертывающаяся, иначе же произвольна. Если t_1, t_2 параметры, на которых зависит положение текущей точки Δ поверхности (Δ), то мы знаем, что система уравнений (6,7) равносильна системе $\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}t_2 = 0$; с другой стороны, так как $\tau_{in} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\omega_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, система (6,7) равносильна системе $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Стало быть, системы

$\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}t_2 = 0$ и $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ взаимно равносильны, из чего вытекает, что например

$$\vartheta_1 = \alpha_1 \, \mathrm{d}t_1 + \alpha_2 \, \mathrm{d}t_2,$$

причем не имеется одновременно $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и без нарушения общности можно предположить $\alpha_1 \neq 0$, так что $\vartheta_1 = 0$ равносильно уравнению

$$\mathrm{d}t_2 = \varphi \, \mathrm{d}t_1, \tag{7,4}$$

где $\varphi = -\alpha_1 : \alpha_2$. Условием голономности относительно K-главных гиперплоскостей ϱ_1 является польная интегрируемость уравнения $\vartheta_1 = 0$. Но так как $\vartheta_1 = 0$ равносильно с (7,4), то полная интегрируемость выражается условием, что φ зависит лишь от t_1, t_2. Если это условие выполнено, то уравнение (7,4) или $\vartheta_1 = 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, определяющим на поверхности (Δ) семейство (γ) ∞^1 линий γ. Вдоль каждой линии γ имеется $\vartheta_1 = 0$, из чего в силу (7,1) вытекает $\Omega = 0$; следовательно, как мы знаем, имеет место уравнение (6,8), которое вместе с (6,6) означает, что γ — *асимптотическая линия поверхности* (Δ). Так как (Δ) неразвертывающаяся поверхность в пространстве Σ_{n+1} $n + 1 \geq 4$ измерений, то мы видим, что при общем выборе поверхности (Δ) она асимптотических линий не имеет, т. е. в общем случае мы получаем неголономный тип относительно обоих K-главных гиперповехностей ϱ_1, ϱ_2.

Если же поверхность (Δ) в пространстве Σ_{n+1} выбрана так, что на ней существует система (γ) асимптотических линий γ, то если ϑ_1 линейная форма в $\omega_1, \ldots, \omega_n$ такая, что $\vartheta_1 = 0$ есть дифференциальное уравнение системы (γ), то это уравнение является вполне интегрируемым и следствием его есть уравнение (6,8) и, следовательно, также уравнение $\Omega = 0$, так что квадратичная форма Ω имеет вид (7,1), причем уравнение $\vartheta_2 = 0$, в отличие от $\vartheta_1 = 0$, вообще говоря, не будет вполне интегрируемо. Тогда построение изложенное в § 6 дает соответствие между S_n и S'_n с двумя различными K-главными гиперплоскостями ϱ_1, ϱ_2, причем относительно ϱ_1 имеет место голономный тип, относительно же ϱ_2 — вообще говоря неголономный.

Рассматриваемый случай распадается на две альтернативы в зависимости от того, *прямые* или *кривые* ли будут линии γ. Первая альтернатива будет подробно изучена в § 8, а вторая — в § 10 (§ 9 посвящен элементам теории параболических конгруенций). В § 11 мы будем исследовать тот случай, когда настанет голономный тип одновременно относительно обеих K-главных гиперплоскостей ϱ_1 и ϱ_2.

8. Предметом настоящего параграфа служат те соответствия между S_n и S'_n, которые получаются построением изложенным в § 6 при условии, что (Δ) — неразвертывающаяся *линейчатая поверхность* пространства Σ_{n+1}. Если γ — текущая образующая поверхности (Δ), то, как известно, существует линейное подпространство трех измерений $\Sigma_3 = \Sigma_3(p)$ пространства Σ_{n+1}, содержащее касательные плоскости поверхности (Δ) во всех точках прямой γ. В пространстве Σ_3 существует проективное соотношение $\pi = \pi(\gamma)$ между точками Ξ на прямой p с одной стороны, а плоскостьями $\pi\Xi$ пространства Σ_3 проходящими через γ, с другой, причем $\pi\Xi$ обозначает касательную плоскость поверхности (Δ) в точке Ξ. В пространстве S_{n+1} поверхности (Δ) пространства Σ_{n+1} отвечает гиперповерхность (C), являющаяся огибающей ∞^2 гиперплоскостей Ξ отвечающих одинакого обозначенным точкам поверхности (Δ). Каждой точке Ξ поверхности (Δ) отвечает в пространстве S_{n+1} семейство ∞^{n-2} точек X, каждая из которых является одновременно гиперплоскостью дуального пространства Σ_{n+1}: это точно те гиперплоскости пространства Σ_{n+1}, которые проходят через касательную плоскость $\pi\Xi$ поверхности (Δ) в точке Ξ; это семейство ∞^{n-2} точек X мы обозначим через $S_{n-2} = S_{n-2}(\Xi)$; оно является линейным подпространством $n - 2$ измерений пространства S_{n+1}. Если в пространстве Σ_{n+1} точка Ξ описывает образующую прямую γ поверхности (Δ), то все пространства $S_{n-2}(\Xi)$ проходят через определенное ($n - 3$)-мерное линейное подпространство $S_{n-3} = S_{n-3}(\gamma)$ пространства S_{n+1}, дуальным образом которого в Σ_{n+1} является пространство выше обозначенное через $\Sigma_3 = \Sigma_3(\gamma)$; кроме того, все эти $S_{n-2}(\Xi)$ лежат в определенном ($n - 1$)-мерном подпространстве $S_{n-1} = S_{n-1}(\gamma)$, дуальным образом которого в Σ_{n+1} является прямая γ.

Итак, гиперповерхность (C) пространства S_{n+1} состоит из ∞^1 линейных ($n - 1$)-мерных пространств $S_{n-1}(\gamma)$, подчиненных лишь тому условию, что два бесконечно близких $S_{n-1}(\gamma)$ пересекаются в пространстве $S_{n-3}(\gamma)$ $n - 3$ измерений, надо исключить случай $n - 2$ измерений этого пересечения, ибо в этом случае поверхность (Δ) была бы развертывающая.

После выбора в пространстве S_{n+1} основной гиперповерхности (C), состоящей из ∞^1 линейных пространств $S_{n-1}(\gamma)$ удовлетворяющих только что формулированному условию, остается еще к полному определению соответствия между S_n и S'_n выбрать в S_{n+1} две различных неподвижных точки (проекторы) C_{n+1}, C_n; их выбор, конечно, подчинен тому условию, что они должны лежать вне гиперплоскости (C). Стало быть, в том частном случае, когда все ∞^1 k-мерных пространств

$S_{n-1}(\gamma)$ проходят через неподвижную точку [или даже через несколько неподвижных точек: если пересечение всех ∞^1 пространств $S_{n-1}(\gamma)$ не пусто, то оно образует линейное пространство s измерений, где $0 \leqq s \leqq n-3$], то надо выбрать проекторы C_{n+1}, C_n так, чтобы они несовпадали с никакой такой неподвижной точкой.

Когда выбраны основная гиперповерхность (C) [по предыдущему состоящая из ∞^1 линейных пространств $n-1$ измерений] и оба проекторы C_{n+1}, C_n, нужно еще выбрать обе гиперплоскости S_n, S'_n пространства S_{n+1}. Этот выбор конечно подчинен условию, что ни C_{n+1} не проходит через S_n, ни C_n — через S'_n, но иначе он несущественен. Можно и удобно предположить, что S_n, S'_n совпадут: $S_n = S'_n$. Рассматриваемое соответствие сопоставляет каждой точке A пространства S_n точку B того же пространства получаемую следующим построением в вспомагательном пространстве S_{n+1}: прямая AC_{n+1} пересечет некоторое из пространств $S_{n-1}(\gamma)$, из которых состоит (C), в точке C; потом прямая CC_n пересечет S'_n в искомой точке B. Пусть обозначим через $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$ проекции пространства $S_{n-1}(\gamma)$ на пространство S_n, причем центром проектирования служит точка C_{n+1} в первом случае, а точка C_n — во втором; стало быть, $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-2}(\gamma)$ являются гиперплоскостями пространства S_n а их пересечение $S^{(0)}_{n-2}(\gamma)$ — $(n-2)$-мерным линейным подпространством того же пространства S_n. Легко убедиться, что пока точка A движется в определенном $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, то её образ B лежит в соответствующем $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$; далее, что частное соответствие между точкой A, описывающей $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, и точкой B, описывающей $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$, является коллинейным, даже перспективным, так как каждая точка пространства $S^{(0)}_{n-2}(\gamma)$ совпадает с своим образом. Итак рассматриваемое соответствие между пространствами S_n и S'_n (по сказанному совпадающими друг с другом) состоит из ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$ пространства $S_n = S'_n$; стало быть, настает случай, который мы в § 4 назвали тривиальным, но с той особенностью, что кроме той системы K-главных гиперплоскостей, существование которой гарантировано самым определением тривиального случая, здесь существует еще другая система K-главных гиперплоскостей, относительно которой, вообще говоря, имеется неголономный тип.

Мы уже заметили, что частное соответствие между гиперплоскостями $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$ пространства S_n является перспективным; легко показать, что центром этого перспективного преобразования служит неподвижная точка, а именно полюс A_n рассматриваемого соответствия между S_n и S'_n, т. е. точка пересечения пространства S_n с прямой C_nC_{n+1}. Наоборот, пусть в пространстве S_n даны две системы ∞^1 гиперплоскостей $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$ отнесенные к одному и тому же параметру γ, так что имеется определенное соответствие между обеими системами; кроме того, пусть в S_n дана неподвижная точка A_n (полюс); предполагается только, что A_n лежит вне всех $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$, $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$. Читатель легко покажет, что преобразование пространства S_n состоящее из ∞^1 перспективных соотношений между $S^{(1)}_{n-1}(\gamma)$ и $S^{(2)}_{n-1}(\gamma)$ с постоянным центром всегда дает соответствие рассматриваемого типа.

9. Пусть теперь дана в пространстве Σ_{n+1} поверхность (Δ), содержащая систему (γ) ∞^1 асимптотических линий γ, никакая из которых не является прямой. Для каждой точки Δ поверхности (Δ) пусть p обозначает касательную соответствующей кривой γ в точке Δ; имеется ∞^2 таких прямых p. Система (p) всех этих прямых называется *параболической конгруенцией прямых*; поверхность (Δ) является (единственной) *фокальной поверхностью* конгруенции, а текущая точка Δ поверхности (Δ) — (единственным) *фокусом* проходящей через неё прямой конгруенции. Итак, система ∞^2 прямых параболической конгруенции единственным образом разложима на ∞^1 развертывающихся поверхностей, ребра возврата которых служат асимптотическими кривими фокальной поверхности.

Параболические конгруенции прямых — это предельный случай конгруенций обладающих двумя различными фокальными поверхностями. Теорию этих последних построили, как известно, особенно Darboux и Tzitzéica (см. например *С. П. Фиников, Теория конгруенций*, 1950, гл. VI). Многие основные понятия и теоремы упомянутой теории теряют значение при переходе к параболическим конгруенциям; это так, например, с понятием преобразования Лапласа. Осмысленным остается, напротив, важное понятие *сопряженности*, которому и посвящен настоящий параграф.

Пусть в пространстве Σ_{n+1} дана параболическая конгруенция (p) с фокальной поверхностью (Δ). Текущая точка Δ поверхности (Δ) пусть будет дана как функция от двух параметров t_1, t_2 так, что $t_2 = \text{const.}$ дает на (Δ) асимптотические кривые γ, касательные p которых и образуют рассматриваемую параболическую конгруенцию. Тогда однородные координаты точки Δ удовлетворяют линейному уравнению в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1^2} = a \frac{\partial \Delta}{\partial t_1} + b \frac{\partial \Delta}{\partial t_2} + c\Delta, \qquad (9,1)$$

где a, b, c функции от t_1, t_2; так как линии γ не являются прямыми, имеем

$$b \neq 0. \tag{9,2}$$

Так как поверхность $(\varDelta)$ неразвертывающаяся, то её касательная плоскость $\left[\varDelta \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2}\right]$ существенно зависит от двух параметров t_1, t_2 и, в частности, не может оставаться геометрически постоянной для $t_2 = \text{const.}$, из чего легко вытекает, что

$$\left[\varDelta \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t_1 \partial t_2}\right] \neq 0. \tag{9,3}$$

Выберем теперь на прямой $p = \left[\varDelta \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1}\right]$ точку $\varDelta_1 \neq \varDelta$. Выбор произвольного множителя однородных координат точки $\varDelta_1$ можно сделать таким образом, что

$$\varDelta_1 = \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} - \varkappa \varDelta, \tag{9,4}$$

где $\varkappa = \varkappa(t_1, t_2)$. Если менять t_1, t_2, то точка $\varDelta_1$ описывает *поверхность* $(\varDelta_1)$, которая невырождается в кривую или в точку, ибо в силу (9,2) вытекает из (9,4), что

$$\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} = (a - \varkappa) \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} + b \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} + \left(c - \frac{\partial \varkappa}{\partial t_1}\right) \varDelta, \tag{9,5}$$

$$\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t_1 \partial t_2} - \varkappa \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} - \frac{\partial \varkappa}{\partial t_2} \varDelta, \tag{9,6}$$

так как согласно (9,2) и (9,3) имеется $\left[\varDelta_1 \frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} \frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_2}\right] \neq 0$. Мы говорим, что поверхность $(\varDelta_1)$ *сопряженна* с нашей параболической конгруенцией, если линии $t_2 = \text{const.}$ — асимптотические [не только на фокальной поверхности $(\varDelta)$, а также] на поверхности $(\varDelta_1)$. Это выражается аналитически условием, что точка $\frac{\partial^2 \varDelta_1}{\partial t_1^2}$ представима в виде линейной комбинации точек (9,4), (9,5) и (9,6). Но из (9,5) получается дифференцированием, учитывая (9,2),

$$\frac{\partial^2 \varDelta_1}{\partial t_1^2} = \left(\frac{\partial a}{\partial t_1} - 2 \frac{\partial \varkappa}{\partial t_1} + a^2 - a\varkappa + c\right) \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial b}{\partial t_1} + ab - b\varkappa\right) \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} - \left(\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial t_1^2} - \frac{\partial c}{\partial t_1} - ac + c\varkappa\right) \varDelta + b \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t_1 \partial t_2},$$

так что

$$\frac{\partial^2 \Delta_1}{\partial t_1^2} - \left(\frac{\partial \log b}{\partial t_1} + a\right) \frac{\partial \Delta_1}{\partial t_1} - b\, \frac{\partial \Delta_1}{\partial t_2} = p\, \frac{\partial \Delta}{\partial t_1} + q\, \Delta,$$

где

$$p = \frac{\partial a}{\partial t_1} - 2\, \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} - (a - \alpha)\, \frac{\partial \log b}{\partial t_1} + c,$$

$$q = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t_1^2} + \frac{\partial \log b}{\partial t_1} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + a\, \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + b\, \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} -$$

$$- c\, \frac{\partial \log b}{\partial t_1} + \frac{\partial c}{\partial t_1} - c\alpha.$$

Для сопряженности необходимо и достаточно $p\alpha + q = 0$ или

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t_1^2} - \left(\frac{\partial \log b}{\partial t_1} + a - 2\alpha\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} - b\, \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} - \frac{\partial \log b}{\partial t_1}\, \alpha^2 -$$

$$- \left(\frac{\partial a}{\partial t_1} - a\, \frac{\partial \log b}{\partial t_1}\right) \alpha - \frac{\partial c}{\partial t_1} + c\, \frac{\partial \log b}{\partial t_1} = 0. \tag{9,7}$$

Чтобы преобразовать условие (9,7) к более удобному для нас виду, введем две новых функции λ, k переменных t_1, t_2, полагая

$$\alpha = \frac{\partial \log \lambda}{\partial t_1}, \tag{9,8}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_1^2} = a\, \frac{\partial \lambda}{\partial t_1} + b\, \frac{\partial \lambda}{\partial t_2} + k\lambda. \tag{9,9}$$

Легкое исчисление показывает, что левая часть уравнения (9,7) тождественно равна

$$\frac{\partial (k - c)}{\partial t_1} - (k - c)\, \frac{\partial \log b}{\partial t_1},$$

так что для справедливости уравнения (9,7) необходимо и достаточно, чтобы

$$k = c - b\, \frac{\mathrm{d} \log \varphi}{\mathrm{d} t_2},$$

где $\varphi \neq 0$ зависит лишь от t_2, так что уравнение (9,9) можно написать в виде

$$\frac{\partial^2 (\varphi\lambda)}{\partial t_1^2} = a\, \frac{\partial (\varphi\lambda)}{\partial t_1} + b\, \frac{\partial (\varphi\lambda)}{\partial t_2} + c\, .\, \varphi\lambda.$$

Полагая $\varphi\lambda = \mu$, будет

$$\alpha = \frac{\partial \log\mu}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial t_1^2} = a\frac{\partial\mu}{\partial t_1} + b\frac{\partial\mu}{\partial t_2} + c\mu. \qquad (9,10)$$

После несущественного изменения множителя однородных координат можно сказать, что самая общая поверхность $(\varDelta_1)$ сопряженная с нашей параболической конгруенцией дана выражением

$$\varDelta_1 = \mu\frac{\partial\varDelta}{\partial t_1} - \frac{\partial\mu}{\partial t_1}\varDelta, \qquad (9,11)$$

где $\mu \neq 0$ — произвольное решение уравнения в частных производных (9,10) удовлетворенного однородными координатами текущей точки $\varDelta$ фокальной поверхности нашей параболической конгруенции. Самый простой случай получается, если μ — линейная комбинация (с постоянными коэфициентами) однородных координат точки $\varDelta$. В этом случае поверхность $(\varDelta_1)$ является геометрическим местом произвольно выбранной постоянной гиперплоскости с прямыми рассматриваемой конгруенции.

Замечание 1. Показанный результат является предельным случаем хорошо известного аналогичного результата из теории конгруенций с двумя различными фокальными поверхностями (см. Фиников, цит. книга, стр. 252).

Замечание 2. Легко видеть, что асимптотические линии $t_2 = \text{const.}$ на поверхности $(\varDelta_1)$ ни в коем случае не могут быть прямыми; поверхность $(\varDelta_1)$ либо неразвертывающаяся, либо она — *плоскость*.

Наоборот, пусть в пространстве Σ_{n+1} дана поверхность $(\varDelta_1)$, отнесенная к криволинейным координатам t_1, t_2, причем линии $t_2 = \text{const.}$ на поверхности $(\varDelta_1)$ — асимптотические, но не прямые, так что $(\varDelta_1)$ является или неразвертывающейся поверхностью или плоскостью. Наша цель вести через каждую точку $\varDelta_1$ поверхности $(\varDelta_1)$ прямую $[\varDelta\varDelta_1]$ так, чтобы она описывала параболическую конгруенцию сопряженную с поверхностью $(\varDelta_1)$; можно предположить, что точка $\varDelta$ является фокусом на прямой $[\varDelta\varDelta_1]$. Однородные координаты точки $\varDelta_1$ удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{\partial^2\varDelta_1}{\partial t_1^2} = a_1\frac{\partial\varDelta_1}{\partial t_1} + b_1\frac{\partial\varDelta_1}{\partial t_2} + c_1\varDelta_1, \qquad (9,12)$$

где a_1, b_1, c_1 — данные функции от t_1, t_2. Искомая точка $\varDelta = \varDelta(t_1, t_2)$ должна удовлетворять уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} &= q\varDelta_1 + \alpha\varDelta, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} &= r\varDelta_1 + p\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} + \beta\varDelta, \end{aligned} \tag{9,13}$$

причем функции p, q, r, α, β переменных t_1, t_2 надо выбрать так, чтобы было удовлетворено условие совместимости

$$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t_1\,\partial t_2} = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial t_2\,\partial t_1}$$

уравнений (9,13), которому можно дать вид

$$\frac{\partial q}{\partial t_2}\varDelta_1 + q\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}\varDelta + \alpha\left(r\varDelta_1 + p\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} + \beta\varDelta\right) =$$
$$= \frac{\partial r}{\partial t_1}\varDelta_1 + r\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial p}{\partial t_1}\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} + p\left(a_1\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1} + b_1\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_2} + c_1\varDelta_1\right) +$$
$$+ \frac{\partial \beta}{\partial t_1}\varDelta + \beta(q\varDelta_1 + \alpha\varDelta).$$

Учитывая [см. (9,2)—(9,6)], что

$$\left[\varDelta\varDelta_1\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1}\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_2}\right] \neq 0, \tag{9,14}$$

мы видим, что условие совместимости выражается четырьмя равенствами

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t_2} = \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, \tag{9,15}$$

$$q = b_1 p,\ r = -\frac{\partial p}{\partial t_1} + (\alpha - a_1)\,p, \tag{9,16}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t_2} - \frac{\partial r}{\partial t_1} + \alpha r - \beta q - c_1 p = 0. \tag{9,17}$$

Из условия (9,15) легко вытекает, что изменив подходящим образом множитель однородных координат искомой точки $\varDelta$, будет $\alpha = \beta = 0$, вследствие чего и с учетом (9,16) уравнения (9,13) примут более простой вид

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial t_1} = b_1 p\varDelta_1,\ \frac{\partial \varDelta}{\partial t_2} = -\left(\frac{\partial p}{\partial t_1} + a_1 p\right)\varDelta_1 + p\frac{\partial \varDelta_1}{\partial t_1}, \tag{9,18}$$

и подставление (9,16) в (9,17) даст условие совместимости в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t_1^2} = -\frac{\partial(a_1 p)}{\partial t_1} - \frac{\partial(b_1 p)}{\partial t_2} + c_1 p. \tag{9,19}$$

Итак выражение p удовлетворяет уравнению в частных производных сопряженному с (9,12). Начальные условия нужно выбрать так, чтобы удовлетворить неравенству (9,14); это возможно, если $p \neq 0$; легко убедиться, что если имеет место (9,14), то Δ всегда опишет неразвертывающую поверхность, что необходимо (а также и достаточно) для того, чтобы действительно получить решение рассматриваемой задачи.

Замечание. Полученный результат опять является предельным случаем хорошо известной аналогичной теоремы о конгруенциях с двумя различными фокальными поверхностями (см. Фиников, цит. книга, стр. 258).

10. После этого краткого отступления вернемся к дальнейшему изучению наших соответствий между S_n и S'_n. Речь идёт теперь о соответствиях получаемых построением изложенным в § 6, если основной гиперповерхности (C) вспомогательного пространства S_{n+1} отвечает в дуальном пространстве Σ_{n+1} неразвертывающаяся поверхность (Δ), содержащая систему (γ) асимптотических кривых γ, неявляющихся прямыми. Обозначая через p касательную, в точке Δ поверхности (Δ), к кривой γ проходящей через Δ, имеется ∞^2 таких прямых p, образующих в Σ_{n+1} параболическую конгруенцию с фокальной поверхностью (Δ). Касательная плоскость ϱ поверхности (Δ) в точке Δ является одновременно соприкасающейся плоскостью соответствующей кривой γ в той же самой точке Δ. В пространстве S_{n+1} Δ является касательной гиперплоскостью гиперповерхности (C), причем касание имеется вдоль $(n-2)$-мерного линейного подпространства S_{n-2} пространства S_{n+1}, дуальным образом которого в дуальном пространстве Σ_{n+1} является плоскость ϱ. В каждой точке C пространства S_{n-2} конус асимптотических касательных гиперповерхности (C) распадается на два $(n-1)$-мерных линейных пространства, пересечением которых является S_{n-2}; если точка C описывает пространство S_{n-2}, то одно из обоих $(n-1)$-мерных пространств, вообще говоря, меняется, другое же, которое вследствие обозначим просто S_{n-1}, остается постоянным (предполагая C в постоянном S_{n-2}) и его дуальным образом в дуальном пространстве Σ_{n+1} является прямая p (т. е. касательная кривой γ в точке Δ).

Если в пространстве S_{n+1} выбрана гиперповерхность (C) или, что то же самое, в дуальном пространстве Σ_{n+1} выбрана поверхность (Δ), то к полному определению соответствия остается выбрать в S_{n+1} оба проектора C_{n+1}, C_n и, кроме того, обе гиперплоскости S_n, S'_n. При том природа рассматриваемого соответствия существенно зависит от выбора точек C_{n+1}, C_n, тогда как выбор гиперплоскостей S_n, S'_n несуществен. Надо вспомнить, что проекторы C_{n+1}, C_n нужно выбрать вне касательной гиперплоскости Δ гиперповерхности (C) в точке C, окрестность которой рассматривается; кроме того $C_n \neq C_{n+1}$, точка C_{n+1} не лежит в гиперплоскости S_n, а точка C_n не лежит в S'_n. Точка A пространства S_n и точка B пространства S'_n отвечают одна другой в рассматриваемом соответствии, если прямые AC_{n+1}, BC_n пересекаются в точке лежащей на основной гиперповерхности (C). Если точка C описывает в пространстве S_{n+1} пространство S_{n-2} [вдоль которого (C) имеет постоянную касательную гиперплоскость Δ], то точка A описывает в S_n пространство $n-2$ измерений $S^{(1)}_{n-2}$, а точка B в S'_n — пространство $n-2$ измерений $S^{(2)}_{n-2}$. Стало быть, частью рассматриваемого соответствия между S_n и S'_n является соответствие между $S^{(1)}_{n-2}$ и $S^{(2)}_{n-2}$, которое, очевидно, коллинейно.

Точке C_{n+1} пространства S_{n+1} отвечает в дуальном пространстве Σ_{n+1} гиперплоскость Σ_n, не проходящая через точку Δ, иначе же произвольная. Можно рассматривать Σ_n как пространство дуальное к пространству S_n, ибо S_n можно заменить на связку прямых пространства S_{n+1}, проходящих через точку C_{n+1}. Аналогично точке C_n пространства S_{n+1} отвечает в дуальном пространстве Σ_{n+1} гиперплоскость Σ'_n, опять не проходящая через точку Δ, и можно рассматривать Σ'_n как пространство дуальное к пространству S'_n.

В каждой точке A пространства S_n имеются две различных, K-главных гиперплоскости рассматриваемого соответствия и, вообще говоря, настает голономный случай относительно единственной из них, которую мы обозначим через $S^{(1)}_{n-1}$; легко видеть, что $S^{(1)}_{n-1}$ является проекцией из центра C_{n+1} на S_n пространства выше обозначенного через S_{n-1}. Пока точка A описывает пространство $S^{(1)}_{n-2}$, то гиперплоскость $S^{(1)}_{n-1}$ остается без изменения. Легко показать, что в пространстве Σ_n дуальном к S_n образом гиперплоскости $S^{(1)}_{n-1}$ является точка пересечения Δ_1 прямой p с гиперплоскостью Σ_n пространства Σ_{n+1}, а образом в Σ_n пространства $S^{(2)}_{n-1}$ является прямая q, в которой пересекаются пространство Σ_n и плоскость ϱ. Существует ∞^2 прямых q, которые, как видно из § 9, образуют в пространстве Σ_n параболическую конгруенцию, фокальная поверхность (Δ_1) окторой является геометрическим местом точки Δ_1; поверхность (Δ_1) состоит из ∞^1 асимптотических кривых γ_1 (не могущих быть прямыми); каждая кривая γ_1 является пересечением пространства γ_1 с развертывающей поверхностью состоящей из касательных прямых к одной из асимптотических кривых γ поверхности (Δ).

При переходе от пространства Σ_n к дуальному пространству S_n каждой кривой γ_1 отвечает огибающая ∞^1 гиперплоскостей $S_{n-1}^{(1)}$, которая является K-главной гиперповерхностью рассматриваемого соответствия; стало быть, K-главные гиперповерхности, относительно которых настанет голономный тип, являются развертывающимися: каждая K-главная гиперплоскость $S_{n-1}^{(1)}$ касается своей огибающей вдоль отвечающего пространства $S_{n-2}^{(1)}$.

Итак здесь имеется частный случай проективного изгибания слоя развертывающихся гиперповерхностей, т. е. огибающих однопараметрического семейства гиперплоскостей. *Этот слой развертывающихся гиперповерхностей пространства* S_n *является параболическим;* это значит, что при переходе от S_n к дуальному пространству Σ_n слой ∞^1 развертывающихся гиперповерхностей перейдет в систему ∞^1 кривых (не прямых) γ_1 пространства Σ_n, которые все вместе образуют поверхность (Δ_1) пространства Σ_n и являются *асимптотическими кривыми* на этой поверхности.

Если дан в пространстве S_n параболический слой развертывающихся гиперповерхностей, то наши рассуждения ведут на проективное изгибание этого слоя, зависящее от двух произвольных функций одного переменного: В пространстве Σ_n дуальном к S_n отвечает данному слою система ∞^1 кривых (не прямых), которые вместе образуют в Σ_n поверхность (Δ_1) и являются асимптотическими кривыми на этой поверхности. Через Σ_n проложим вспомогательное $(n+1)$-мерное пространство Σ_{n+1}, в котором мы построим путем выясненным в § 9 (и зависящим от двух произвольных функций одного переменного) параболическую конгруенцию, сопряженную с (Δ_1). Образом фокальной поверхности (Δ) этой параболической конгруенции в пространстве S_{n+1} дуальном к Σ_{n+1} является основная гиперповерхность (C) искомого соответствия; кроме того, образом гиперплоскости Σ_n пространства Σ_{n+1} в пространстве S_{n+1} является один проектор C_{n+1} соответствия, которое после этого будет вполне определено выбором второго проектора C_n; этот выбор зависит уже только от $n+1$ произвольных постоянных.

В следующих статьях настоящей серии мы увидим, что существуют другие, более общие, виды проективного изгибания параболического слоя развертывающихся гиперповерхностей;

теперешние проективные изгибания выделяются тем свойством, что они имеют в каждой точке A пространства S_n *две различных К-главных гиперплоскости*.

11. В настоящем параграфе мы выясним, когда построение, данное в § 6, ведет на такие соответствия между S_n и S'_n с двумя различными K-главными гиперплоскостями ϱ_1, ϱ_2, что настанет голономный случай одновременно относительно обеих ϱ_1, ϱ_2. Из предыдущего видно, что такой случай настанет тогда, и только тогда, если поверхность $(\varDelta)$ содержится в постоянном трехмерном линейном подпространстве Σ_3 пространства Σ_{n+1}. В пространстве S_{n+1} дуальном к Σ_{n+1} образом пространства Σ_3 является $(n - 3)$-мерное линейное подпространство (для $n = 3$ *точка*) S_{n-3} пространства S_{n+1}; основной гиперповерхностью (C) служит геометрическое место ∞^2 линейных $(n - 2)$-мерных пространств проходящих через постоянное S_{n-3}.

Удобно выбрать в S_{n+1} линейное трехмерное пространство S_3^* так, чтобы оно не имело общей точки с пространством S_{n-3}; если это условие выполнено, то иначе выбор пространства S_3^* несущественен. Это вспомогательное S_3^* пересечет гиперповерхность (C) в поверхности (C_0); гиперповерхность (C) является конусом с вершиной S_{n-3} и основанием (C_0). Поверхность (C_0), очевидно, неразвертывающаяся.

Проекторы C_{n+1}, C_n, не лежая на (C), не могут лежать на S_{n-3}; очевидно не будет нарушать общности, если мы предположим, что оба проекторы C_{n+1}, C_n лежат в нашем вспомогательном S_3^*. Так как C_{n+1} не лежит в S_n, то S_3^* не является частью S_n, так что S_3^* и S_n пересекаются в *плоскости* S_2. Проекции асимптотических линий поверхности (C_0) из центра C_{n+1} на плоскость S_2 образуют, согласно классической теореме Koenigsa [см. например Fubini-Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, гл. X, стр. 152, формула (6′)] плоскую сеть σ с равными инвариантами. Проекцией пространства S_{n-3} из центра C_{n+1} на гиперплоскость S_n является пространство $n - 3$ измерений $S_{n-3}^{(1)}$, которое, очевидно, не имеет общей точки с плоскостью S_2. Обе системы K-главных гиперплоскостей являются конусами с общей вершиной $S_{n-3}^{(1)}$, каждый из которых содержит одну из кривых плоской сети σ.

Наоборот предположим, что в пространстве S_n дано постоянное $(n - 3)$-мерное подпространство $S_{n-3}^{(1)}$ и два слоя конусов с общей вершиной $S_{n-3}^{(1)}$ так, что если мы пересечем их через вспомогательную плоскость S_2, не имеющую общей точки с $S_{n-3}^{(1)}$, получается в S_2 сеть σ с равными инвариантами. Тогда существуют соответствия между S_n и S'_n, являющиеся проективным изгибанием одновременно одного и другого из обоих данных слоев, и эти соответствия получаются следующим образом. Через S_n мы проложим $(n+1)$-мерное пространство S_{n+1} и предположим, что S'_n, подобно как и S_n, является гиперплоскостью пространства S_{n+1}; впрочем, без нарушения общности мы могли бы предположить, что $S'_n = S_n$. В пространстве S_{n+1} мы выберем точку C_{n+1} так, чтобы она не лежала в S_n, но иначе произвольно; точка C_{n+1} вместе с плоскостью S_2 определяет в S_{n+1} трехмерное пространство S_3^*. После этого выберем в S_{n+1} еще $(n - 3)$-мерное пространство S_{n-3} не проходящее через точку C_{n+1} так, чтобы его проекцией из центра C_{n+1} на гиперплоскость S_n было данное $S_{n-3}^{(1)}$; без нарушения общности можно выбрать на пример $S_{n-3} = S_{n-3}^{(1)}$. В пространстве S_3^* можно теперь выбрать (неразвертывающуюся) поверхность (C_0), не проходящую через точку C_{n+1}, так, что проекции её асимптотических линий из центра C_{n+1} на плоскость S_2 образуют как раз сеть σ. В пространстве S_3 теперь выберем точку $C_n \neq C_{n+1}$ вне поверхности (C_0). Искомое соответствие между S_n и S'_n получается тогда построением упомянутым в § 6, причем основная гиперповерхность (C) состоит из $(n - 2)$-мерных пространств соединяющих S_{n-3} с отдельными точками поверхности (C_0); проекторами служат точки C_{n+1}, C_n. Легко показать, что *при данных обоих слоях K-главных конусов соответствие зависит от трех произвольных постоянных*, ибо через подходящее коллинейное преобразование пространства S_{n+1} можно в только что выясненном построении истребить весь произвол вплоть до выбора точки C_n в пространстве S_3, вводящей три произвольных постоянных.

Если в пространстве S_n дан лишь один слой K-главных конусов с общей вершиной $S_{n-3}^{(1)}$, то выбрав этот слой произвольно, наше соответствие будет зависеть ещё от двух произвольных функций одного переменного. Ибо соответствие в настоящем случае получается построением описанным в § 10; существование другого слоя K-главных конусов гарантировано тем, что, как легко видеть, в рассматриваемом случае поверхность (Δ), получаемая способом описанным в § 10 из уравнений вида (9,18), лежит в трехмерном пространстве, так что она, кроме рассматриваемой системы асимптотических линий γ, должна содержать еще другую систему асимптотических линий.

Конусы с вершиной $S_{n-3}^{(1)}$, данные в пространстве S_n, вообще говоря, не являются гиперплоскостями; однако может также случиться, что один из обоих слоев K-главных конусов состоит из гиперплоскостей. Это так тогда, и только тогда, если одна нз обеих систем, из которых состоит сеть σ, является системой прямых, т. е. тогда, и только тогда, если поверхность выше обозначенная через (C_0) является линейчатой поверхностью.

Может также случиться, что *оба слои* K*-главных конусов* состоят из гиперплоскостей; это настанет тогда, и только тогда, если поверхность (C_0) — 2^0-го порядка. [Вспомня, что (C_0) не развертывающаяся, мы видим, что если (C_0) 2^0-го порядка, то она не может быть конусом.] Итак мы получаем такие *соответствия между* S_n и S'_n, *у которых существуют две различных системы* (K-главных) *гиперплоскостей, каждая из которых преобразуется коллинейно*. Существуют различные случаи соответствий рассматриваемого вида, смотря по тому, какое положение точек C_{n+1}, C_n относительно квадрики (C_0):

I. Обе точки C_{n+1}, C_n лежат вне квадрики (C_0) и прямая $[C_n C_{n+1}]$ не является касательной к (C_0). Соответствия этого вида зависят от одной произвольной постоянной; такой постоянной может служить например, двойное отношение $(C_n C_{n+1}\, E' E'')$, где E', E'' — точки пересечения прямой $[C_n C_{n+1}]$ с квадрикой (C_0). Напротив, в следующих случаях II—VIII уже не имеется никакой произвольной постоянной.

II. Обе точки C_{n+1}, C_n лежат вне квадрики (C_0) и прямая $[C_n C_{n+1}]$ является касательной к (C_0).

III. Точка C_{n+1} лежит вне (C_0), точка же C_n лежит на (C_0); прямая $[C_n C_{n+1}]$ не является касательной к (C_0).

IV. Точка C_{n+1} лежит вне (C_0), точка же C_n лежит на (C_0); прямая $[C_n C_{n+1}]$ является касательной к (C_0).

V. Точка C_{n+1} лежит на (C_0), точка же C_n лежит вне (C_0); прямая $[C_n C_{n+1}]$ не является касательной к (C_0).

VI. Точка C_{n+1} лежит на (C_0), точка же C_n лежит вне (C_0); прямая $[C_n C_{n+1}]$ является касательной к (C_0).

VII. Обе точки C_n, C_{n+1} лежат на (C_0); прямая $[C_n C_{n+1}]$ не лежит на (C_0).

VIII. Целая прямая $[C_n C_{n+1}]$ является частью квадрики (C_0).

Все эти соответствия — алгебраические. Соответствие обратное к соответствию вида I, II, VII, VIII является соответствием того же вида. Соответствия видов III, V обратны друг другу; то же самое имеет место и для соответствий видов IV, VI.

Гиперповерхности пространства S_n, коллинейно преобразованные при рассматриваемом соответствии, в случаях I, II, III, IV образуют квадратичный конус с $(n-3)$-мерной вершиной $S^{(1)}_{n-3}$; в случаях же V, VI, VII, VIII такие гиперплоскости образуют две связки гиперплоскостей, $(n-2)$-мерные основания которых пересекаются в $S_{n-3}^{(1)}$. В пространстве S'_n соответствующие гиперплоскости образуют квадратичный конус в случаях I, II, V, VI, а две связки в случаях III, IV, VII, VIII.

Замечание. Следствием результатов настоящей статьи является то, что при неколлинейном соответствии между S_n и S'_n существуют самое большее две системы ∞^1 гиперплоскостей, преобразующихся коллинейно, и что кроме только что рассматриваемых не существует других соответствий обладающих двумя такими системами ∞^1 гиперплоскостей. Иначе обстоит дело, если слово *гиперплоскость* заменим на *гиперповерхность*. Ибо известные преобразования Moebiusa преобразуют каждую сферу коллинейно, так что при них существует ∞^{n+1} гиперповерхностей, каждая из которых преобразуется коллинейно; на пытания, не может ли количество ∞^{n+1} быть превышено, и существуют ли другие типи преобразований с ∞^{n+1} гиперповерхностями преобразующимися коллинейно, я до сих пор ответов не знаю.

12. Если $n \geqq 4$, то задача формулированная в начале § 5 теперь полностью решена. Остается изучить для $n = 3$ соответствия полученные в статье III настоящей серии, а именно те, которые мы определили в § 27, § 31, § 32 и § 33 этой статьи. Как мы уже высказали в § 5 и как мы теперь покажем, при всех этих соответствиях существуют две различных K-главных плоскости ϱ_1, ϱ_2, причем всегда имеется голономный тип одновременно относительно овеих ϱ_1 и ϱ_2.

Начнем с соответствий изученных в III § 27. Они определенны системой Пфаффа III (26,1) и неравенствами

$$[\omega_{30}\omega_{31}] \neq 0, \ [\omega_2\omega_{12}] \neq 0. \tag{12,1}$$

Условиями совместимости системы III (26,1) служат уравнения III, (26,4)—(26,9). Реперы выбраны так, что все t_{ik} равны нулю и что*)

$$e_{30} = e_{31} = e_{32} = e_{12} = 0, \tag{12,2}$$

тогда как

$$e_{11} - e_{00},\ e_{22} - e_{00},\ e_{33} - e_{00},\ e_{10},\ e_{20},\ e_{21},\ e_{13},\ e_{23}$$

пока остаются произвольными.

Согласно III (26,4) и III (26,5) можно положить

$$\tau_{13} = a_0\omega_1 + a_1\omega_2,\ \tau_{23} = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \tag{12,3}$$

$$\tau_{20} = \alpha\omega_2 \quad [\alpha \neq 0 \text{ по III } (26,3)]. \tag{12,4}$$

---

*) Значит, что к уравнениям III (26,10) должно присоединить $e_{12} = 0$, и соответствующим образом поправить III (26,11).

Из (12,3), I (5,15) и III (26,1) вытекает

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = a_0\omega_1^2 + 2a_1\omega_1\omega_2 + a_2\omega_2^2. \tag{12,5}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (12,3) и (12,4) даст

$$\left.\begin{aligned} &\delta a_0 + a_0(e_{00} - 2e_{11} + e_{33}) = 0, \\ &\delta a_1 + a_1(e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}) - a_0 e_{21} = 0, \\ &\delta a_2 + a_2(e_{00} - 2e_{22} + e_{33}) - 2a_1 e_{21} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{12,6}$$

$$\delta\varkappa + 2\varkappa(e_{00} - e_{22}) = 0. \tag{12,7}$$

Из (12,6) вытекает, что можно специализировать репер так, чтобы иметь один из следующих случаев:

$$a_0 = 1, \ a_1 = 0, \ a_2 = -1; \tag{12,8}$$

$$a_0 = a_2 = 0, \ a_1 = 1; \tag{12,9}$$

$$a_0 = 1, \ a_1 = a_2 = 0; \tag{12,10}$$

$$a_0 = a_1 = 0, \ a_2 = 1; \tag{12,11}$$

$a_0 = a_1 = a_2 = 0$ невозможно, потому что в (12,5) должно быть $\Omega_3 \neq 0$. Но случаи (12,10), (12,11) также невозможны. Ибо если имеет место (12,10), то (12,3) даст $\tau_{23} = 0$, так что учитывая III (26,7) получим $[\omega_1\tau_{20}] = 0$, что невозможно ввиду (12,1) и (12,4). А если имеет место (12,11), то (12,3) даст $\tau_{13} = 0$ и, учитывая III (26,8), получим $[\omega_{12}\tau_{20}] = 0$, что опять невозможно ввиду (12,1) и (12,4).

Следовательно, мы можем предположить, что мы имеем либо (12,8) либо (12,9). В обоих случаях (12,5) показывает, что ранг формы Ω_3 равен двум, значит, что существуют две различных K-главных плоскости. Кроме того, в силу (12,7) можно специализировать репер дальше так [см. (12,4)], что

$$\tau_{20} = \omega_2. \tag{12,12}$$

Надо еще показать, что имеет место голономный тип относительно обеих K-главных плоскостей.

В случае (12,8) мы имеем

$$\tau_{13} = \omega_1, \ \tau_{23} = -\omega_2, \tag{12,13}$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2 \tag{12,14}$$

и нужно только показать, что обе уравнения $\omega_1 + \omega_2 = 0$, $\omega_1 - \omega_2 = 0$ вполне интегрируемы. Заметим прежде всего, что из (12,13), III (26,6) и III (26,7) вытекает

$$\omega_{31} = \omega_1. \tag{12,15}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (12,13) даст, учитывая (12,12), (12,15) и III (26,1)

$$[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33} + \omega_3\omega_1] + [\omega_{12} - \omega_{21}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{12} - \omega_{21}\omega_1] - [\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33} - \omega_3\omega_2] = 0,$$

так что

$$[\omega_{12} - \omega_{21}\omega_1\omega_2] = 0, \tag{12,16}$$

$$[\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_3\omega_1\omega_2] = 0. \tag{12,17}$$

С другой стороны, (12,15) вместе с последним из уравнений III (26,1) даст

$$[d\omega_1] = [\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_3\omega_1] - [\omega_{21}\omega_2],$$

$$[d\omega_2] = [\omega_{00} - \omega_{22}\omega_2] - [\omega_{12}\omega_1],$$

так что, учитывая (12,16) и (12,17), получим

$$[\omega_1 + \omega_2,\ d(\omega_1 + \omega_2)] = 0, \qquad [\omega_1 - \omega_2,\ d(\omega_1 - \omega_2)] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Тот же самый результат получится и в случае (12,9) или

$$\tau_{13} = \omega_2,\ \tau_{23} = \omega_1, \tag{12,18}$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0,\ \Omega_3 = 2\omega_1\omega_2; \tag{12,19}$$

надо доказать, что уравнения $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ вполне интегрируемы. Уравнения (12,12), (12,14), III (26,6) и III (26,7) дают

$$\omega_{31} = \omega_2. \tag{12,20}$$

Из (12,12), (12,18) и III (26,8) следует

$$[\omega_{12} - \omega_{30}\omega_2] = 0, \tag{12,21}$$

так что III (26,12) дает

$$[\omega_{12}\omega_1\omega_2] = 0. \tag{12,22}$$

Внешнее дифференцирование второго из уравнений (12,18) даст, учитывая (12,12), (12,20) и III (26,1),

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - 2[\omega_{21} - \omega_3\omega_2] = 0,$$

так что

$$[\omega_{21} - \omega_3\omega_1\omega_2] = 0. \tag{12,23}$$

С другой стороны, (12,20) вместе с последним из уравнений III (26,1) дадут

$$[d\omega_1] = [\omega_{00} - \omega_{11}\omega_1] + [\omega_2\omega_{21}] + [\omega_3\omega_2],$$
$$[d\omega_2] = [\omega_{00} - \omega_{22}\omega_2] + [\omega_1\omega_{12}].$$

Следовательно из (12,22) и (12,23) вытекает, что

$$[\omega_1 d\omega_1] = [\omega_2 d\omega_2] = 0,$$

а это и требовалось доказать.

13. Результат, который мы только что вывели чисто аналитическим путем, допускает замечательное геометрическое истолкование, к которому теперь мы и перейдем. В III § 27 было доказано, что те соответствия между S_3 и S_3', которые теперь нас интересуют, возникают из любово проективного (неколлинейного) изгибания неразвертывающейся поверхности путем, который будет удобно снова подробно описать.

Пусть дано соответствие между неразвертывающейся поверхностью (A_3) пространства S_3 и поверхностью (B_3) пространства S_3' (как известно, всегда также неразвертывающейся), являющееся проективным изгибанием: значит, для каждой пары A_3, B_3 взаимно соответствующих точек обеих поверхностей должно существовать коллинейное соотношение K^* между S_3 и S_3' (преобразующее точку A_3 в точку B_3) реализующее проективное изгибание, т. е. обладающее тем свойством, что для каждой кривой C поверхности (A_3) проходящей через рассматриваемую точку A_3, в соответствующей точке B_3 имеется аналитическое касание второго порядка между образом C' кривой C при исходном соответствии между (A_3) и (B_3) с одной стороны, и образом K^*C той же самой кривой C, с другой. Коллинеация K^*, конечно зависящая от выбора пары A_3, B_3, даже при данном выборе этой пары не является вполне определенной, а зависит ещё от одной произвольной постоянной [см. III (27,4)]; однако, все точки касательной плоскости к (A_3) в заданной её точке A_3 преобразуются одинаково при всех наших K^*.

В точке A_3 поверхности (A_3) существуют две (различные или совпадающие) замечательные касательные t_1, t_2 к поверхности (A_3), которые, к сожалению, не имеют до сих пор определенного названия; я предлагаю называть их *касательными Картана*. Они обладают тем характеристическим свойством, что если кривая C поверхности (A_3) имеет в точке A_3 касательную t_1 или t_2, то в соответствующей точке B_3 поверхности (B_3) имеет место касание (вообще говоря, только геометрическое) между кривыми C' и K^*C (это свойство является независимым от выбора коллинеации K^*, реализующей проективное изгибание в рассматриваемой точке A_3). Если $t_1 \neq t_2$, то t_1, t_2 являются *сопряженными касательными* поверхности (A_3) в точке A_3; на поверхности (A_3) существует тогда сопряженная сеть, называемая Картаном réseau conjugué de la déformation projective, а Финиковым (цит. книга, стр. 434) основанием проэктивного изгибания. Это, сети R Демулена и Цицейки (см. литературные указания у Финикова в цит. книге, стр. 308—309), введенные этими авторами ещё перед возникновением понятия проективного изгибания; соответствующие поверхности (A_3) называются *поверхностями* R; они служат фокальными поверхностями *конгруенций* R, состоящих из одной или другой системы касательных Картана. Если же обе касательные Картана t_1, t_2 совпадут в единственную касательную t, то поверхность (A_3) названа мною *поверхностью* R_0; касательные t в этом случае — *асимптотические*, а параболическая конгруенция состоящая из асимптотических касательных Картана называется *конгруенцией* R_0.

Упомянутая геометрическая характеризация касательных Картана была найдена независимо Картаном и мною; в цитированной статье Картана *Sur la déformation projective des surfaces,* где это понятие встречается в первые, дана (на стр. 278) другая их характеризация; третья же дана мною в цитированной книге *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces,* стр. 203. Для настоящей же цели важна четвертая характеризация, найденная мною в III § 27, которую удобно здесь повторить. Мы уже упомянули, что в данной точке A_3 поверхности (A_3) коллинеация K^*, реализующая проективное изгибание, не является вполне определенной, а зависит еще от одной произвольной постоянной, обозначенной через λ в III § 27, где формулирована мною задача, вести через каждую точку A_3 поверхности (A_3) касательную t так, чтобы подходящим образом выбранная K^* была, вдоль всей прямой t, касательной коллинеацией того соответствия между S_3 и S_3', которое каждой точке X прямой t сопоставляет её образ K^*X при коллинеации K^* (впрочем, образ K^*X является независимым от выбора коллинеации K^* реализующей проективное изгибание). Указывается, что эта задача разрешима тогда, и только тогда, если t — касательная Картана; соответствующая коллинеация K^* — вполне определена, и тождественна с коллинеацией, обозначенной через K здесь в § 12 и в III § 27. Получаем, следовательно, два таких соответствия в случае поверхности R, а только одно — в случае поверхности R_0. И это, как раз, соответствия рассматриваемые в § 12, так что их обещанное геометрическое описание проведено.

Остается характеризовать геометрически обе системы K-главных поверхностей, что и дает обещанное геометрическое истолкование результатов § 12. Я утверждаю, что *K-главные поверхности* рассматриваемого соответствия между S_3 и S_3' — это *линейчатые поверхности описываемые касательной Картана*

$[AA_3]$, *если точка* A_3 *фокальной поверхности* (A_3) *описывает асимптотическую линию*. В свете результатов § 12 видно, что надо только показать, что асимптотические линии поверхности (A_3) даны в случае (12,8) уравнениями $\omega_1 + \omega_2 = 0$, $\omega_1 - \omega_2 = 0$, в случае же (12,9) — уравнениями $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Но из III (27,1) следует, что асимптотические линии поверхности (A_3) даны уравнением

$$\omega_{30}\omega_2 + \omega_{31}\omega_{12} = 0; \tag{13,1}$$

итак надо лишь показать, что уравнение (13,1) в случае (12,13) равносильно с уравнением $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 0$, а в случае (12,18) — с уравнением $\omega_1\omega_2 = 0$. В первом случае согласно III, (26,8) и (26,9), можно положить, учитывая (12,12), (12,13) и (12,15),

$$\omega_{12} = u\omega_1 + v\omega_2,\ \omega_{30} = -v\omega_1 - u\omega_2,$$

так что левая часть в (13,1) равна $u(\omega_1^2 - \omega_2^2)$, причем $u \neq 0$ по (12,1). Во втором случае из (12,21) и III (26,12) следует, что можно положить

$$\omega_{12} = u\omega_1 + 2v_1\omega_2,\ \omega_{30} = u\omega_1 + 2v_2\omega_2. \tag{13,2}$$

Дифференцируя внешним образом первое из уравнений (12,18) вместе с уравнениями (12,12) и (12,20), получим, согласно III (26,1),

$$-2[\omega_{12}\omega_1] + [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{30} - \omega_{12}\omega_1] + 2[\omega_{00} - \omega_{22}\omega_2] = 0,$$
$$[\omega_{30} + \omega_{12}\omega_1] - [\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] = 0.$$

Из этих уравнений легко сделается вывод, что в уравнениях (13,2) должно быть $v_1 + v_2 = 0$; но тогда [см. ещё (12,20)] левая часть уравнения (13,1) примет вид $u\omega_1\omega_2$; есть $u \neq 0$ по (12,1).

14. Все соответствия определенные в статье III обладают тем свойством, что существует в пространстве S_3 конгруенция L, прямые которой перейдут при данном соответствии в прямые, составляющие в пространстве S_3' конгруенцию L'. В случае соответствия рассматриваемого в III § 27 мы знаем, что такое соответствие является двумя различными способами проективным изгиванием слоя плоскостей, причем плоскости обоих слоев являются линейчатыми поверхностями принадлежащими к конгруенции L; мы увидим, что тот же самый результат остается справедливым и для всех прочих соответствий полученных в статье III.

Рассмотренный уже случай распадается на два, в первом из которых L — конгруенция R, а в другом — конгруенция R_0. Конгруенция R имеет на каждой своей прямой два различных фокуса; вообще говоря, каждый фокус описывает невырожденную и неразвертывающуюся поверхность, причем всем асимптотическим линиям одной фокальной поверхности отвечают асимптотические же линии другой; но может также случиться, что имеется лишь одна невырожденная (и неразвертывающаяся) фокальная поверхность, а что другая вырождается в *прямую*. Всегда же в этом случае оба слои K-главных поверхностей состоят из неразвертывающихся линейчатых поверхностей конгруенции, отвечающих асимптотическим линиям фокальной поверхности. Напротив, конгруенция R_0 имеет на каждой своей прямой единственный фокус, всегда описывающий невырожденную и неразвертывающуюся поверхность F; конгруенция R_0 состоит из касательных к линиям одной из обеих систем асимптотических линий на R_0; эту систему, которая никогда не может состоять из прямых, мы обозначим через σ, другую же через σ'. Конгруенция R_0 — параболическая; F является единственной фокальной поверхностью её. K-главными поверхностями служат опять линейчатые поверхности конгруенции R_0, отвечающие асимптотическим линиям фокальной поверхности F. Притом линиям системы σ, очевидно, отвечают *развертывающиеся* поверхности, а линиям системы σ' — неравзертывающиеся.

Перейдем теперь к остальным трем типам соответствий найденных в статье III.

15. *Соответствия из* III § 31. Не повторая подробно построение такого соответствия, выясненное на цитированном месте, заметим только, что конгруенция L в настоящем случае состоит из ∞^1 пучков прямых с центром в текущей точке A_3 пространственной кривой (A_3), причем каждый пучок находится в соответствующей соприкасающей плоскости $[AA_1A_3]$ этой кривой; на каждой прямой конгруенции центр A_3 соответствующего пучка является единственным фокусом и эти пучки являются единственными развертывающимися конгруенции.

Согласно III (26,1) и III, (31,14) и (31,16) мы имеем

$$\Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 0,\ \Omega_3 = 2\omega_1\omega_2.$$

По III (31,25) $[\mathrm{d}\omega_2] = 0$, так что имеет место голономный тип относительно K-главных поверхностей $\omega_2 = 0$. Эти поверхности являются плоскостями, а именно соприкасающимися плоскостями кривой (A_3); значит, что имеет место тривиальный случай относительно их. Мы покажем, что уравнение $\omega_1 = 0$ также вполне интегрируемо, так что оно определяет слой ∞^1 неразвертывающихся линейчатых поверхностей конгруенции L; наше соответствие является проективным изгибанием этого слоя.

Дифференцируя III (31,16) внешним образом и учитывая III, (26,1), (31,10), (31,14) и (31,21), мы получаем

$$[\omega_{00} - \omega_{11}\omega_1] - 2[\omega_{21} - \omega_3\omega_2] = 0,$$

так что

$$[\omega_{21} - \omega_3\omega_1\omega_2] = 0.$$

Но из последнего равенства III (31,10) следует, что $[\omega_1 \, d\omega_1] = [\omega_{21} - \omega_3\omega_1\omega_2]$. Итак $[\omega_1 \, d\omega_1] = 0$, что и требовалось доказать.

16. *Соответствия из* III, § 32. Предположим, конечно, что в уравнениях III (32,17) имеется $h = 0$, так что, как мы показали на цитированном месте, для $h \neq 0$ мы вернулись бы к подслучаю уже рассмотренного случая соответствий порожденных проективным изгибанием неразвертывающейся поверхности. В случае $h = 0$ соответствие дано уравнениями III, (32,22) и (32,23); мы знаем, что конгруенция L является непараболической линейной конгруенцией с директрисами (A_3), $(A_3 - A)$; если A описывает прямую конгруенции L, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Из III, (26,1) и (32,14) следует, что

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = \omega_1^2 - \omega_2^2,$$

так что K-главные плоскости даны уравнениями $\omega_1 + \omega_2 = 0$, $\omega_1 - \omega_2 = 0$, которые, согласно III (32,21), вполне интегрируемы. Итак линейная конгруенция L содержит два различных слоя неразвертывающихся линейчатых поверхностей, и рассматриваемое соответствие является проективным изгиванием каждого из этих двух слоев.

17. *Соответствия из* III, § 33. Конгруенция L в рассматриваемом случае распадается на ∞^1 пучков; центры этих пучков составляют прямую $d = [A_1A_3]$, а плоскости пучков проходят через ту же самую прямую d, так что эти пучки являются единственными развертывающимися конгруенции L; если A описывает прямую конгруенций L, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Из III, (33,4), (33,9) и (33,10) мы видим, что

$$\tau_{13} = \alpha\omega_2, \; \tau_{23} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \tag{17,1}$$

причем $\alpha \neq 0$ по III (26,3). Из (17,1) и III (26,1) следует, что

$$\Omega_1 = 0, \; \Omega_2 = 0, \; \Omega_3 = \omega_2(2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2),$$

так что имеются две K-главных плоскости, определенные через $\omega_2 = 0$ и $2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = 0$, соответственно. Уже в III § 33 мы констатировали, что уравнение $\omega_2 = 0$ вполне интегрируемо. Оно, очевидно, определяет плоскости проходящие через прямую d, так что относительно K-главных плоскостей $\omega_2 = 0$ имеется тривиальный случай. Мы покажем, что уравнение $2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = 0$ также вполне интегрируемо. Это значит, что в конгруенции L имеется слой ∞^1 неразвертывающихся поверхностей так, что рассматриваемое соответствие является проективным изгибанием этого слоя.

Из уравнений III, (33,9) и (33,10) следует внешним дифференцированием, что

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}\alpha + 2\alpha(\omega_{00} - \omega_{22})\,\omega_2] = 0, \\ &[\mathrm{d}\alpha + 2\alpha(\omega_{00} - \omega_{22})\,\omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}\beta + \beta(\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}) - 2\alpha\omega_{21} + 2\alpha\omega_3\omega_2] = 0; \end{aligned}$$

ввиду этого можно положить

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\alpha + 2\alpha(\omega_{00} - \omega_{22}) = \lambda\omega_2, \\ &\mathrm{d}\beta + \beta(\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}) - 2\alpha\omega_{21} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 - 2\alpha\omega_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}(2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)] = &- 2\alpha[\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}\omega_1] + \\ &+ \beta[\omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] - (2\alpha - \beta)\,\lambda[\omega_1\omega_2]; \end{aligned}$$

итак, учитывая III (33,8), получим

$$[2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \mathrm{d}(2\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Résumé.

Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces VI.

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 23 septembre 1952.)

Appelons couche d'hypersurfaces une famille d'hypersurfaces d'un espace linéaire S_n à n dimensions remplissant simplement une région de S_n. Si une correspondance entre S_n et S'_n porte la couche σ dans la couche σ', je l'appelle une *déformation projective de la couche* σ lorsque pour chaque couple A, B de points correspondants de S_n, S'_n, il existe une correspondance homographique K entre S_n et S'_n jouissant de la propriété suivante: Soit C une courbe quelconque de S_n passant par A, H l'hypersurface de σ passant par A, C' l'image de C par la correspondance donnée, KC l'image de C par l'homographie H; alors il

doit toujours avoir lieu, en B, un contact analytique entre C' et KC qui est du premier ordre, en général, mais qui devient du second ordre dans le cas où C est située sur H. Je dis aussi que l'homographie K *réalise* la déformation projective de la couche σ. J'ai réussi à résoudre complètement les questions d'existence attachées à la déformation projective des couches d'hypersurfaces et je vais exposer les résultats dans deux Mémoires suivants de cette série. Au Mémoire présent, je traite et résouds complètement le problème de la détermination de toutes les correspondances qui soient des déformations projectives de deux couches différentes σ_1, σ_2 simultanément (le cas de plus que deux couches est impossible pour une correspondance non homographique). Il se montre qu'on peut toujours supposer que ce soit la même homographie H qui réalise la déformation de σ_1 et de σ_2, d'où il résulte sans peine que les correspondances cherchées sont contenues parmi celles déterminées aux Mémoires II et III de cette série. Plus précisément, le problème actuel est résolu, d'une part, par celles de correspondances déterminées au § 19 du Mémoire II, pour lesquelles la transformée dualistique de l'hypersurface désignée par (C) à l'endroit cité soit une surface à deux dimensions contenant une famille ∞^1 de lignes asymptotiques, et d'autre part, par toutes les correspondances déterminées aux §§ 27, 31, 32 et 33 du Mémoire III. On en déduit, en particulier, que toutes les correspondances trouvées au Mémoire III contiennent une famille (ou même deux) ∞^1 de déformations projectives de surfaces réglées, ce qui est particulièrement remarquable pour les correspondances de III, § 27, liées à une déformation projective d'une surface non réglée. Comme résultat très particulier mais digne d'être mentionné, indiquons encore la détermination de toutes les correspondances entre S_n et S_n' pouvant être décomposées, *en deux manières distinctes* (le cas de plus que deux étant encore impossible), en une famille ∞^1 de correspondances homographiques entre hyperplans.