František Nožička

La connexion et la normale de l'hypersurface dans l'espace riemannien du point de vue de la géométrie affine

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 1, 17–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100011

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1(76) 1951

LA CONNEXION ET LA NORMALE DE L'HYPERSURFACE DANS L'ESPACE RIEMANNIEN DU POINT DE VUE DE LA GÉOMÉTRIE AFFINE.

F. NOŽIČKA, Praha.

(Reçu le 20 Janvier 1951.)

Cet article forme un complément à un article antérieur. On montre ici que l'induction métrique est un cas particulier de l'induction affine ce qui prouve l'importance des définitions affines du vecteur affinonormal et de celle de la correspondance induite.

Considérons un espace à n dimensions, ou tout au moins un certain domaine D de cet espace et supposons un espace à $n - 1$ dimensions (holonôme) défini dans le domaine D. Si l'espace donné à n dimensions (l'espace préexistant) est doué d'une métrique régulière dans D, ce qu'on appelle l'immersion de l'espace à $n - 1$ dimensions dans D est bien clair. Le tenseur métrique de l'espace préexistant étant donné, on sait comment construire le tenseur métrique (dit tenseur métrique induit) de la variété à $n - 1$ dimensions et la connexion métrique de cette variété. On voit alors que l'espace préexistant détermine (on dit qu'il induit) dans l'espace immersé une certaine métrique dite métrique induite. Au sens précédent on parle brièvement de l'induction métrique.

L'espace préexistant étant affin général, le problème d'immersion d'une variété à $n - 1$ dimensions dans cet espace devient naturellement plus compliqué. J'ai discuté ce problème dans mon article „La connexion et le vecteur affinonormal à direction invariante de l'hypersurface dans l'espace affin" publié dans le Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha, **75** (1950), 179—209.*) De la connaissance du vecteur affinonormal de la variété résulte la définition de la connexion induite par ce vecteur. Au sens de cette définition on parle de l'induction affine.

L'article présent n'est qu'un complément de l'article cité plus haut. Je veux montrer ici que l'induction métrique est un cas spécial de l'induction affine ce qui prouve l'importance des définitions affines du vecteur affinonormal et de celle de la connexion induite.

* Cet article est indiqué dans ce que suit par [I] (dans les notes 3, 4, 8, 9, 10, 11, 15).

I. Considérons un espace riemannien V_n à n dimensions[1]) de coordonnées ξ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, dont le tenseur métrique $g_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ est défini positif. Soit V_{n-1} l'hypersurface dans V_n (à $n - 1$ dimensions) déterminée par les équations paramétriques suivantes

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a), \quad a = 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{1}$$

Dans ce que suit nous supposerons l'existence des dérivées partielles par rapport à ξ^α continues du premier ordre (au moins) pour le tenseur $g_{\lambda\mu}$ et l'existence des dérivées partielles par rapport à η^a continues du second ordre (au moins) pour les fonctions $\xi^\alpha(\eta^a)$. De plus nous exclurons de nos considérations tous les points de l'hypersurface V_{n-1}, où le rang de la matrice $(B^1_a, B^2_a, \ldots, B^n_a)$, $a = 1, 2, \ldots, n - 1$, $B^\nu_a = \dfrac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a}$, est plus petit que $n - 1$.

Le tenseur $g_{ab} = g_{ab}(\eta^a)$ défini par

$$g_{ab} = g_{\lambda\mu} B^\lambda_a B^\mu_b \tag{2}$$

est dit tenseur métrique induit de la variété V_{n-1} plongée dans V_n.

Théorème I. Sous les suppositions faites plus haut le tenseur métrique g_{ab} de la variété V_{n-1} est défini positif.

Démonstration: Considérons la forme différentielle quadratique $g_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}\xi^\lambda\, \mathrm{d}\xi^\mu$. Par hypothèse cette forme est définie positive; cela entraîne que cette forme ne peut s'annuler qu'au cas où $\mathrm{d}\xi^\lambda = 0$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Le long de la variété V_{n-1} on a

$$\mathrm{d}\xi^\lambda = B^\lambda_a\, \mathrm{d}\eta^a. \tag{3}$$

Supposons que $\mathrm{d}\eta^a$ n'est pas identiquement nul ($\mathrm{d}\eta^a$ est alors pour au moins un indice a différent de zéro). Cela posé, les éléments $\mathrm{d}\xi^\lambda$ déterminés par les équations (3) ne sont pas identiquement nuls. C'est la conséquence de la supposition que le rang de la matrice $(B^1_a, B^2_a, \ldots B^n_a)$ est $n - 1$ dans le domaine considéré de la variété V_{n-1}. Il en résulte que $g_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}\xi^\lambda\, \mathrm{d}\xi^\mu > 0$, et, d'après (3), (2),

$$g_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}\xi^\lambda\, \mathrm{d}\xi^\mu = g_{\lambda\mu} B^\lambda_a B^\mu_b\, \mathrm{d}\eta^a\, \mathrm{d}\eta^b = g_{ab}\, \mathrm{d}\eta^a\, \mathrm{d}\eta^b > 0,$$

ce qui démontre le théorème.

D'après le théorème précédent on peut introduire dans V_{n-1} le tenseur contravariant $g^{ab} = g^{ba}$ par la définition suivante

$$g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b, \quad \text{où} \quad \delta^a_b = \begin{cases} 1 \text{ pour } a = b, \\ 0 \text{ pour } a \neq b. \end{cases} \tag{4}$$

La connexion métrique du tenseur $g_{\lambda\mu}$ dans V_n est

$$\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} = \tfrac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\lambda\mu}).$$

---

[1]) $n > 1$ est un nombre entier.

La connexion métrique induite au sens de l'induction métrique dans V_{n-1} est ensuite

$$\left\{ {c \atop ab} \right\} = \tfrac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}).$$

2. Introduisons maintenant le vecteur tangent t_ν de la variété V_{n-1} par les équations

$$B^\nu_a t_\nu = 0, \quad g^{\lambda\nu} t_\lambda t_\nu = 1[2]. \tag{5}$$

C'est la même définition du vecteur tangent t_ν que celle du vecteur tangent de l'hypersurface dans l'espace affin[3]) en y ajoutant la relation $g^{\lambda\mu} t_\lambda t_\mu = 1$ ce qui exprime la normalisation métrique du vecteur tangent (vecteur tangent au sens de la géométrie affine). Par suite des hypothèses faites au No. 1, la solution t_ν des équations (5) existe et est unique (abstraction faite de l'orientation).

Définissons le vecteur n^ν par les relations

$$n^\nu t_\nu = 1, \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = 0, \quad (a = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6}$$

où t_ν est la solution des équations (5), ∇_a est le vecteur symbolique de la dérivée de Lagrange, c'est-à-dire,

$$\nabla_a t_\nu \equiv \partial_a t_\nu - \left\{ {\mu \atop \nu\alpha} \right\} B^\alpha_a t_\mu \quad \left(\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^a} \right).$$

Les équations (6) définissant le vecteur n^ν sont les mêmes que celles de la géométrie affine pour le vecteur affinonormal[4]).

Les équations (6) sont connues dans la géométrie affine sous le nom de „Conditions de Ricci pour le vecteur affinonormal".[5])

Introduisons encore le second tenseur métrique de la variété V_{n-1}

$$h_{ab} \equiv B^\nu_a \nabla_b t_\nu.[6]) \tag{7}$$

Théorème 2. Le rang du tenseur h_{ab} étant $n-1$, le vecteur

$$\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha \tag{8}$$

est la solution unique des équations (6).

Démonstration: En partant des équations (8), (5), on obtient facilement

$$\overset{\circ}{n}{}^\nu t_\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha t_\nu = 1,$$

$$\overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha \nabla_a t_\nu = 0, \text{ car } \frac{\partial}{\partial \eta^a} (g^{\nu\alpha} t_\alpha t_\nu) = 0 \text{ et encore}$$

---

[2]) $g^{\lambda\nu}$ est le tenseur contravariant lié au le tenseur $g_{\lambda\mu}$ par les relations

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda = \nu \\ 0 \text{ pour } \lambda \neq \nu. \end{cases}$$

[3]) Voir [I], p. 180

[4]) Voir [I], p. 182, 185.

[5]) J. A. SCHOUTEN: Der Ricci Kalkül, p. 136(43), p. 141(74a).

[6]) Le tenseur bien connu en géometrie affine.

$$\frac{\partial}{\partial \eta^a}(g^{\nu\alpha}t_\alpha t_\nu) = \nabla_a(g^{\nu\alpha}t_\alpha t_\nu) = 2g^{\nu\alpha}t_\alpha \nabla_a t_\nu.^{7)}$$

On voit alors que le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ est une solution des équations (6). Il faut ensuite démontrer que le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ en est la solution unique. Supposons alors qu'il existe au moins un autre vecteur $\overline{n}^\nu$ différent du vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ et satisfaisant aux équations (6). On pourrait écrire un tel vecteur comme il suit

$$\overline{n}^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_a v^a, \tag{9}$$

où v^a est un vecteur dans V_{n-1} qui n'est pas identiquement nul (car nous supposons $\overline{n}^\nu \neq \overset{\circ}{n}{}^\nu$). D'après notre supposition le vecteur $\overline{n}^\nu$ satisfait aux équations (6) d'où résulte la condition nécessaire $\overline{n}^\nu \nabla_a t_\nu = 0$. En tenant compte de (9) on peut écrire cette condition

$$\overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu + B^\nu_d (\nabla_a t_\nu)\, v^d = 0.$$

Mais le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ satisfait aux équations (6) et donc $\overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu = 0$. D'après la définition (7) on peut ramener notre condition à la forme

$$h_{da} v^d = 0. \tag{10}$$

D'après l'hypothèse du théorème le rang du tenseur h_{ab} est $n - 1$. Le système des équations (10) a alors une seule solution triviale $v^a \equiv 0$, ce qui mène, d'après (9) à l'égalité $\overline{n}^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu$; mais c'est contradictoire, car nous avons supposé $\overline{n}^\nu \neq \overset{\circ}{n}{}^\nu$.

Remarque 1. On voit d'après ce qui précède que le vecteur n^ν, défini par les équations (6), donc par les équations qui définissent sous les mêmes suppositions[8]) le vecteur affinonormal dans la géométrie affine[9]) est identique avec la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ de la variété V_{n-1} (si l'on normalise le vecteur tangent t_ν d'après la dernière des équations (5)). La normale métrique est alors un cas spécial du vecteur affinonormal défini par les relations (6) dans la géométrie affine.

Introduisons encore les éléments $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu$ par les relations suivantes:

$$B^\nu_a \overset{\circ}{B}{}^b_\nu = \delta^b_a, \quad \overset{\circ}{B}{}^b_\nu \overset{\circ}{n}{}^\nu = 0, \quad \left(\delta^b_a = \begin{cases} 1 \text{ pour } a = b, \\ 0 \text{ pour } a \neq b. \end{cases}\right. \tag{11}$$

Les éléments $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu$ sont bien déterminés par les équations précédentes. Construisons maintenant la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$ dans V_{n-1}[10])

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} = \overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b. \tag{12}$$

---

[7]) On sait que le tenseur $g^{\lambda\mu}$ satisfait à la relation $\nabla_a g^{\lambda\nu} = 0$.

[8]) Voir [I], p. 181.

[9]) Voir [I], p. 185.

[10]) Voir [I], p. 183, 185.

C'est la connexion induite par le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^{\nu}$ [voir (8)] dans V_{n-1}, laquelle on nomme connexion innée au sens de l'induction affine.[10])

Théorème 3. La connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$ induite par la normale $\overset{\circ}{n}{}^{\nu}$ dans V_{n-1} (définie dans (12)) est identique avec la connexion métrique $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ du tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1} (définie à la fin du No. 1), c'est à dire

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab} \equiv \overset{\circ}{B}{}^{c}_{\nu} \nabla_a B^{\nu}_{b} \equiv \tfrac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \equiv \left\{ {c \atop ab} \right\}. \qquad (13)$$

Démonstration: Désignons le vecteur symbolique de la dérivée covariante appartenant à la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$ [définie au (12)] par le symbole $'\overset{\circ}{\nabla}_a$. Il résulte de (12), (2)

$$\begin{aligned} '\overset{\circ}{\nabla}_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{d}_{ac} g_{db} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{d}_{bc} g_{ad} &= \partial_c g_{ab} - \overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{db} \\ - \overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} (\nabla_b B^{\alpha}_{c})\, g_{ad} &= \partial_c g_{ab} - \overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} B^{\vartheta}_{d} B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} - \\ - \overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} B^{\varepsilon}_{a} B^{\vartheta}_{d} (\nabla_b B^{\alpha}_{c})\, g_{\varepsilon\vartheta}. \end{aligned} \qquad (14a)$$

Parce que la relation

$$\overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} B^{\vartheta}_{d} = \delta^{\vartheta}_{\alpha} - t_\alpha \overset{\circ}{n}{}^{\vartheta}, \quad \text{où} \quad \delta^{\vartheta}_{\alpha} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \vartheta = \alpha \\ 0 \text{ pour } \vartheta \neq \alpha, \end{cases}$$

est valable[11]), on peut par exemple ramener le second terme à droite dans l'équation (14a) à la forme

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}{}^{d}_{\alpha} B^{\vartheta}_{d} B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} = (\delta^{\vartheta}_{\alpha} - t_\alpha \overset{\circ}{n}{}^{\vartheta})\, B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} = B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\alpha\beta} - \\ - t_\alpha \overset{\circ}{n}{}^{\vartheta} B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} = B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

car, d'après (8), (5),

$$t_\alpha \overset{\circ}{n}{}^{\vartheta} B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} = t_\alpha g^{\vartheta\nu} t_\nu (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\vartheta\beta} = B^{\beta}_{b} t_\beta (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, t_\alpha = 0.$$

D'une manière analogue on peut transcrire le troisième terme à droite dans (14a). On donne alors à la relation (14a) la forme

$$\begin{aligned} '\overset{\circ}{\nabla}_c g_{ab} &= \partial_c g_{ab} - B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\alpha\beta} - B^{\varepsilon}_{a} (\nabla_b B^{\alpha}_{c})\, g_{\alpha\varepsilon} = \\ &= \partial_c g_{ab} - B^{\beta}_{b} (\nabla_a B^{\alpha}_{c})\, g_{\alpha\beta} - B^{\alpha}_{a} (\nabla_b B^{\beta}_{c})\, g_{\beta\alpha}. \end{aligned} \qquad (14b)$$

Si le symbole ∇_c désigne le vecteur symbolique de la dérivée de Lagrange, on a

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} = \nabla_c (B^{\alpha}_{a} B^{\beta}_{b} g_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta} B^{\beta}_{b} \nabla_c B^{\alpha}_{a} + g_{\alpha\beta} B^{\alpha}_{a} \nabla_c B^{\beta}_{b},$$

car $\nabla_c g_{\alpha\beta} = 0$.[12]) Parceque pour les variétés holonômes la relation $\nabla_c B^{\alpha}_{a} = \nabla_a B^{\alpha}_{c}$ a lieu, on peut, par suite de (14c), mettre la relation (14b) sous la forme

$$'\overset{\circ}{\nabla}_c g_{ab} = 0 \qquad (15)$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pourque la connexion $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$ soit la connexion métrique relative au tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1}.

---

[11]) Voir [I], p. 182.

Remarque 2. Le théorème précédent montre que la connexion induite dans l'hypersurface V_{n-1} plongée dans V_n au sens de la géométrie riemannienne est un cas spécial de l'induction affine. La connexion $\{{}^{c}_{ab}\}$ relative au tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1} est identique avec la connexion innée, bien connue dans la géométrie affine,[13]) lorsqu'on introduit la normalisation métrique du vecteur tangent t_ν (la normalisation $g^{\lambda\nu}t_\lambda t_\nu = 1$). Mais ce résultat a été démontré sous l'hypothèse que le rang du tenseur h_{ab} était $n - 1$. Dans ce qui suit nous discuterons le cas où le rang du tenseur h_{ab} est plus petit que $n - 1$.

3. Nous supposerons maintenant que le rang H du tenseur h_{ab} est plus petit que $n - 1$. H est alors un nombre entier tel qu'on ait

$$0 < H < n - 1. \tag{16}$$

En faisant cette hypothèse déterminons le vecteur normal n^ν de la variété V_{n-1} par les équations

$$n^\nu t_\nu = 1, \; n^\nu \nabla_a t_\nu = 0, \tag{17}$$

où t_ν est le vecteur tangent défini par les relations (5). Nous nous proposons maintenant de trouver [sous l'hypothèse (16)] toutes les solutions des équations (17), c'est à dire, de trouver tous les vecteurs n^ν satisfaisant aux équations (17). Mais faisons d'abord la remarque suivante:

Le système des équations homogènes

$$h_{ab}u^b = 0 \tag{18}$$

(c'est un système de $n - 1$ équations homogènes pour $n - 1$ inconnues u^b) a, sous l'hypothèse (16), une infinité de solutions non triviales (différentes de zéro) pour le vecteur u^b. Nous pouvons toujours trouver $n - H - 1$ vecteurs linéairement indépendants $\underset{1}{u^b}, \underset{2}{u^b}, \ldots, \underset{n-H-1}{u^b}$ qui satisfont aux équations (18) et toute solution de ces équations est une combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est-à-dire,

$$u^b = \sum_{i=1}^{n-H-1} \underset{i}{\lambda}\, \underset{i}{u^b}.$$

Il en résulte que chaque vecteur u^b qui est situé dans l'hyperplan à $n - H - 1$ dimensions, dit hyperplan asymptotique du point considéré de la variété V_{n-1},[14]) est une solution des équations (18) et que chaque solution des équations (18) est ou bien un vecteur situé dans ce hyperplan asymptotique ou bien le vecteur zéro.

[12]) Si le symbole ∇_α signifie le vecteur symbolique de la dérivée covariante, appartenante à la connexion $\left\{{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\right\}$ dans V_n, on a évidemment

$$\nabla_c g_{\alpha\beta} = B^\gamma_c \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{car} \quad \nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0.$$

[13]) Voir [I], p. 185.

Chaque vecteur qui satisfait aux relations (18) détermine alors en chaque point de la variété V_{n-1} une certaine direction asymptotique.[14])

Théorème 4. Supposons qu'on ait pour le rang H du tenseur h_{ab} $0 < H < n - 1$. Chaque solution des équations (17) a la forme

$$n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B_a^\nu u^a, \tag{19}$$

où $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\mu} t_\mu$ et u^a est ou un vecteur arbitraire situé dans l'hyperplan asymptotique à $n - H - 1$ dimensions ou le vecteur zéro.

Démonstration: D'une manière analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 2 nous constaterons que le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ est une solution des équations (17). S'il existe une autre solution des équations (17) n^ν, différente de la solution $\overset{\circ}{n}{}^\nu$, elle peut être ramenée à la forme [voir (9)]

$$n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B_a^\nu v^a, \text{ où } v^a \neq 0. \tag{20}$$

Pour un tel vecteur n^ν la première des équations (17) est satisfaite ce qui résulte immédiatement de (5), (6). La seconde des relations (17) conduit à la condition nécessaire

$$h_{ad} v^d = 0$$

(comme dans la démonstration du théorème 2). Si le vecteur n^ν de la forme (20) est une solution des équations (17), il en résulte nécessairement que le vecteur v^a dans V_{n-1} doit avoir la direction asymptotique en chaque point considéré de la variété V_{n-1} (ou, autrement dit, qu'il doit être situé dans l'hyperplan asymptotique à $n - H - 1$ dimensions au point considéré). C'est la conséquence des considérations qui précèdent dans cette étude le théorème 4. Mais nous avons appellé u^b un vecteur jouissant d'une telle propriété. Le cas $v^a \equiv 0$ conduit à la solution $\overset{\circ}{n}{}^\nu$.

Remarque 3. Le théorème précédent montre que sous l'hypothèse (16) la définition affine (17) du vecteur normal n^ν ne détermine pas uniquement la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ dans le cas de la géométrie riemannienne. La normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ est de même une solution des équations (17) ayant la propriété qu'elle est le seul vecteur satisfaisant aux équations (17) dont le module est l'unité. Le module du vecteur n^ν déterminé dans (19) est, en raison de (2), (5), (8),

$$\begin{aligned} g_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu = g_{\lambda\mu}(\overset{\circ}{n}{}^\lambda + B_a^\lambda u^a)(\overset{\circ}{n}{}^\mu + B_b^\mu u^b) = g_{\lambda\mu} \overset{\circ}{n}{}^\lambda \overset{\circ}{n}{}^\mu + \\ + 2 g_{\lambda\mu} B_a^\lambda \overset{\circ}{n}{}^\mu u^a + g_{\lambda\mu} B_a^\lambda B_b^\mu u^a u^b = 1 + g_{ab} u^a u^b. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1 le tenseur g_{ab} est défini positif. Donc, pourque le vecteur n^ν ait son module égal à un il est nécessaire et il suffit que

[14]) J. A. SCHOUTEN, D. J. STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II. Groningen-Batavia, 1938, p. 65.

$u^a \equiv 0$. Mais cette condition conduit, d'après (19), au vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu$. Si nous ajoutons [l'hypothèse (16) étant valable] à la définition affine (17) du vecteur n^ν la condition $g_{\lambda\mu}n^\lambda n^\mu = 1$, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 5. Supposons qu'on ait pour le rang H du tenseur h_{ab} $0 < H < n - 1$. Le système des équations

$$n^\nu t_\nu = 1, \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = 0, \quad g_{\lambda\nu} n^\lambda n^\nu = 1 \tag{21}$$

a alors une solution unique $n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$.

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de ce qui précède.

Posons maintenant la question de la forme de la connexion induite dans V_{n-1} par le vecteur n^ν [induite au sens de l'induction affine[15])] qui satisfait aux équations (17) [n^ν est alors de la forme (19)].

Soit alors n^ν de la forme (19) et déterminons les éléments B^a_ν par les relations suivantes

$$B^a_\nu B^\nu_b = \delta^a_b,\ n^\nu B^a_\nu = 0, \quad \text{où} \quad \delta^a_b = \begin{cases} 1 \text{ pour } a = b \\ 0 \text{ pour } a \neq b. \end{cases} \tag{22}$$

On peut observer, à cause des hypothèses faites au No. 1, que les éléments B^a_ν sont bien déterminés par les relations (22). La connexion induite par le vecteur n^ν dans V_{n-1} au sens de la géométrie affine[15]) est

$$\Gamma^c_{ab} = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b. \tag{23}$$

Théorème 6. Soit n^ν le vecteur déterminé dans (19). La connexion induite par ce vecteur peut être ramenée à la forme

$$\Gamma^c_{ab} = \left\{ {c \atop ab} \right\} + h_{ab} u^c, \tag{24}$$

où $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ est la connexion métrique appartenant au tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1}.

Démonstration: Comme nous l'avons vu plus haut, le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\mu} t_\mu$ satisfait aux équations (17). Désignons par $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu$ les éléments déterminés dans (11). Le déterminant de composantes $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu$, t_ν ($a = 1, 2, \ldots, n - 1$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$) est différent de zéro, c'est à dire,

$$[\overset{\circ}{B}{}^1_\nu, \overset{\circ}{B}{}^2_\nu, \ldots, \overset{\circ}{B}{}^{n-1}_\nu, t_\nu] \neq 0, \tag{25}$$

car, en raison de (5), (6), (11),

$$[B^\nu_1, B^\nu_2, \ldots, B^\nu_{n-1}, \overset{\circ}{n}{}^\nu]\,[\overset{\circ}{B}{}^1_\nu, \overset{\circ}{B}{}^2_\nu, \ldots, \overset{\circ}{B}{}^{n-1}_\nu, t_\nu] = 1.$$

Il en résulte que les vecteurs $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu, t_\nu$ ($a = 1, 2, \ldots, n - 1$) (en considérant ces vecteurs comme des vecteurs dans V_n) sont linéairement indépendants. Nous pouvons par suite mettre

$$B^a_\nu = \overset{\circ}{B}{}^c_\nu d^a_c + r^a t_\nu, \tag{26}$$

[15]) Voir [I], p. 183.

où B^a_ν sont des éléments déterminés dans (22) [appartenant à un certain vecteur n^ν de la forme (19)]. Les d^a_c, r^a sont des éléments dans V_{n-1}, éléments que nous voulons maintenant préciser. On obtient, en raison des relations (5), (6), (11), (17), (22)

$$B^a_\nu B^\nu_b = (\overset{\circ}{B}{}^c_\nu d^a_c + r^a t_\nu)\, B^\nu_b,$$
$$\delta^a_b = \delta^c_b d^a_c;$$

donc

$$d^a_b = \delta^a_b, \quad \text{où} \quad \delta^a_b = \begin{cases} 1 \text{ pour } a = b \\ 0 \text{ pour } a \neq b, \end{cases} \tag{27}$$

d'où

$$B^a_\nu n^\nu = (\overset{\circ}{B}{}^c_\nu \delta^a_c + r^a t_\nu)(\overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_e u^e),$$

c'est-à-dire, à cause de (11), (22), (17),

$$0 = r^a + \overset{\circ}{B}{}^a_\nu B^\nu_c u^c = r^a + u^a,$$

d'où

$$r^a = -u^a. \tag{28}$$

Nous pouvons alors, par suite de (27), (28), écrire la relation (26)

$$B^a_\nu = \overset{\circ}{B}{}^a_\nu - u^a t_\nu. \tag{29}$$

Pour la connexion Γ^c_{ab} induite par le vecteur $n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_a u^a$ [voir (19)] et définie dans (23) on obtient ainsi

$$\Gamma^c_{ab} = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\overset{\circ}{B}{}^c_\nu - u^c t_\nu)\, \nabla_a B^\nu_b = \overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b - u^c t_\nu \nabla_a B^\nu_b.$$

D'après (5), (7) on a $t_\nu \nabla_a B^\nu_b = -B^\nu_b\, \nabla_a t_\nu = -h_{ab}$.

D'après le théorème 3 $\overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \{{}^{\,c}_{ab}\}$. En substituant les dernières expressions dans les relations précédentes on obtient finalement les équations (24) ce qui prouve le théorème.

Remarque 4. Une conséquence immédiate des formules (24) est le résultat suivant: pourque la connexion induite Γ^c_{ab} soit identique à la connexion métrique $\{{}^{\,c}_{ab}\}$, il faut et il suffit que $u^c \equiv 0$. Mais pour $u^c \equiv 0$ on tire de (19) $n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu$. Donc la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ est la seule solution des équations (17) jouissant de la propriété que la connexion induite par elle même dans V_{n-1} soit identique avec la connexion métrique $\{{}^{\,c}_{ab}\}$ du tenseur g_{ab}. Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 7. Supposons qu'on ait pour le rang H du tenseur h_{ab} $0 < H < n-1$. Parmi tous les vecteurs n^ν qui satisfont aux équations

$$n^\nu t_\nu = 1, \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = 0$$

seul le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ jouit de la propriété que la connexion induite par lui-même (au sens de l'induction affine) soit identique avec la connexion métrique $\{{}^{\,c}_{ab}\}$ du tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1}.

4. Il nous reste à discuter le cas $h_{ab} \equiv 0$. C'est le cas de la variété totalement géodésique dans V_n. Le vecteur t_ν étant défini, comme précédemment, par les équations (5), nous déterminons le vecteur normal n^ν par les équations (17), c'est-à-dire,

$$n^\nu t_\nu = 1, \; n^\nu \nabla_a t_\nu = 0. \tag{30}$$

Le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ est ici, comme dans les cas précédents, une des solutions des équations (30).

Théorème 8. Pour les hypersurfaces V_{n-1} totalement géodésiques dans V_n (ce sont des hypersurfaces pour lesquelles $h_{ab} \equiv 0$) toutes les solutions des équations (30) sont de la forme

$$n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_a w^a, \tag{31}$$

où $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ et w^a est un vecteur arbitraire dans V_{n-1}.

Démonstration: Le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ satisfait évidemment aux équations (30). On constate facilement que chaque vecteur n^ν de la forme (31) (le vecteur w^a étant arbitraire) satisfait à la première des équations (30). Mais il satisfait aussi aux autres relations dans (30), car en raison de (7) et de l'hypothèse, on a

$$n^\nu \nabla_a t_\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu + B^\nu_d w^d \nabla_a t_\nu = h_{da} w^d = 0$$

(car $h_{da} \equiv 0$, $\overset{\circ}{n}{}^\nu \nabla_a t_\nu = 0$). Mais chaque vecteur n^ν pour lequel la condition $t_\nu n^\nu = 1$ est satisfaite peut être ramené à la forme (31). C'est évident.

Remarque 5. Par un procédé analogue à celui employé dans la remarque 3 on constate que parmi tous les vecteurs n^ν qui sont de la forme (31) et donc des solutions des équations (30), il existe un seul vecteur dont le module est l'unité. C'est précisément le vecteur $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ qui est identique avec la normale métrique.

Théorème 9. Soit la variété V_{n-1} totalement géodésique (c'est-à-dire $h_{ab} \equiv 0$). Soit n^ν une solution arbitraire des équations (30). La connexion induite[16]) dans V_{n-1} par le vecteur n^ν est indépendante du choix de la solution n^ν des équations (30) et elle est identique à la connexion métrique $\left\{ {c \atop ab} \right\}$ appartenant au tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1}.

Pour démontrer le théorème on procède d'une manière analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 6.

Prenons le vecteur $n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_a w^a$ (w^a est un vecteur arbitraire dans V_{n-1}) qui est, toujours d'après le théorème précédent, dans le cas de la variété V_{n-1} totalement géodesique dans V_n, la solution des équations (30) et déterminons (w^a étant fixe) les éléments B^a_ν par les équations (22) [où n^ν est maintenant de la forme (31)]. La connexion induite

[16]) Connexion induite au sens de l'induction affine.

par ce vecteur dans V_{n-1} (au sens de l'induction affine) est $\Gamma^c_{ab}=B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b$. On constate, comme dans la démonstration du théorème 6, que les éléments B^a_ν peuvent être exprimés sous la forme

$$B^a_\nu = \overset{\circ}{B}{}^a_\nu - w^a t_\nu, \tag{32}$$

où $\overset{\circ}{B}{}^a_\nu$ sont définis dans (11). D'où pour la connexion induite par le vecteur n^ν

$$n^\nu = \overset{\circ}{n}{}^\nu + B^\nu_a w^a,$$

$$\Gamma^c_{ab} = B^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = (\overset{\circ}{B}{}^c_\nu - w^c t_\nu)\nabla_a B^\nu_b = \overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b -$$
$$- w^c t_\nu \nabla_a B^\nu_b = \overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b$$

car, à cause de (5), (7) et de l'hypothèse $t_\nu \nabla_a B^\nu_b = - h_{ab} = 0$. D'après le théorème 3 on a $\overset{\circ}{B}{}^c_\nu \nabla_a B^\nu_b = \{^{\,c}_{ab}\}$; donc $\Gamma^c_{ab} = \{^{\,c}_{ab}\}$ pour chaque choix du vecteur w^a dans V_{n-1}, donc pour toutes les solutions des équations (30).

Remarque 6. La normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ induit de même dans le cas $h_{ab} = 0$ la connexion métrique $\{^{\,c}_{ab}\}$ dans V_{n-1}.

5. Dans ce paragraphe nous résumons les résultats obtenus dans les considérations précédentes.

Une variété V_{n-1} à $n - 1$ dimensions dans l'espace riemannien V_n à n dimensions (avec un tenseur métrique défini positif) étant donné, le système des équations (A) $n^\nu t_\nu = 1$, $n^\nu \nabla_a t_\nu = 0$, où t_ν est le vecteur tangent défini dans (5), a toujours, sous les hypothèses faites dans le paragraphe 1, pour solution la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$. Si le rang du tenseur h_{ab} (le second tenseur métrique) est $n - 1$, la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ est la solution unique des équations (A). Si le rang du tenseur h_{ab} est plus petit que $n - 1$ ou dans le cas $h_{ab} = 0$, le système (A) a, outre la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$, d'autres solutions (une infinité). La normale métrique est le seul vecteur parmi toutes ces solutions qui ait un module égal à un. Si l'on ajoute au système (A) la condition $g_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu = 1$, qui exprime la normalisation métrique du vecteur n^ν, le système des équations (B) $n^\nu t_\nu = 1$, $n^\nu \nabla_a t_\nu = 0$, $g_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu = 1$ détermine uniquement la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu = g^{\nu\alpha} t_\alpha$ quel que soit le rang du tenseur h_{ab} de la variété V_{n-1}. La connexion induite par la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$ (au sens de la géométrie affine) est identique à la connexion métrique $\{^{\,c}_{ab}\}$ appartenant au tenseur métrique g_{ab} dans V_{n-1}.

Il en résulte que la connexion métrique $\{^{\,c}_{ab}\}$ dans V_{n-1} n'est qu'un cas spécial de la connexion induite au sens de la géométrie affine, celui de la connexion induite par la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$. La normale métrique satisfait de même aux conditions de Ricci (6) pour le vecteur affinonormal.

Considérons finalement les conditions (A) de Ricci. Le vecteur t_ν qui figure dans ces équations est le vecteur tangent au sens de la géométrie affine. Mais il est en outre un vecteur normalisé, un vecteur du module égal à un, normalisation qui n'est pas possible dans la géométrie affine générale. Si nous introduisons encore la normalisation métrique du vecteur n^ν satisfaisant aux relations (A) nous parvenons à la normale métrique $\overset{\circ}{n}{}^\nu$. La connexion induite par elle au sens de la géométrie affine est identique avec la connexion métrique dans V_{n-1}. On peut brièvement dire, que la connexion métrique dans V_{n-1} est un cas spécial de l'induction affine lorsqu'on introduit pour le vecteur tangent et affinonormal la normalisation métrique.